القسم الأدبي

الرياضيات

العامة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسى الثانى



تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح　　أ / سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى　　أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

جميع الحقوق محفوظة لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٥/ ٢٠١٦

رقم الإيــداع ١٠٥٥٦ / ٢٠١٥

الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 013 - 4

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، الاحتمال، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: المتتابعات والمتسلسلات

١ - ١ المتتابعات والمتسلسلات ٤

١ - ٢ المتتابعة الحسابية ١٠

١ - ٣ المتسلسلات الحسابية ١٨

١ - ٤ المتتابعة الهندسية ٢٤

١ - ٥ المتسلسلات الهندسية ٣٣

ملخص الوحدة ٤٢

تمارين عامة ٤٤

اختبار تراكمي ٤٦

الوحدة الثانية: التباديل والتوافيق

٢ - ١ مبدأ العد ٥٠

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل ٥٣

٢ - ٣ التوافيق ٥٨

ملخص الوحدة ٦٢

تمارين عامة ٦٣

اختبار تراكمي ٦٤

المحتويات

المحتويات

الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

٣ - ١ معدل التغير ٦٨

٣ - ٢ الاشـــتقاق ٧٤

٣ - ٤ قواعد الاشتقاق ٧٨

٣ - ٤ التكامل ٨٨

ملخص الوحدة ٩٤

تمارين عامة ٩٥

اختبار تراكمى ٩٧

الوحدة الرابعة: الاحتمال

٤ - ١ حساب الاحتمال ١٠٠

ملخص الوحدة ١١٧

تمارين عامة ١١٩

اختبار تراكمى ١٢٢

اختبارات عامة وإجابات

اختبارات عامة ١٢٤

أجوبة بعض التمارين ١٣٥

المحتويات



الوحدة الأولى

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and series

مقدمة الوحدة

مما لا شك فيه أن الرياضيات تساعد على اكتشاف وتمثيل الأنماط التى قد تكون منتهية أو غير منتهية حيث يمكن تواجدها فى المواقف الحياتية المختلفة أو يمكن تركيبها وتكوينها، والكثير منها أنماط رقمية لما لها من استخدامات مختلفة فى الحياة اليومية؛ حيث توجد فى صور متتابعات ومتسلسلات، وقد تطورت هذه الأنماط فى الدراسات الحديثة من الجانب النظرى إلى الجانب التطبيقى فى مجال العلوم والهندسة والإحصاء، وقد أصبح الحاسب الآلى أول اختراع قابل للتطور ؛ حيث إنه قد تم التفاعل معه بشكل فريد وغير مسبوق، ويمكن الاستعانة به فى تحليل أعقد المسائل الرياضية والفيزيائية فى جميع فروع المعرفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم المتتابعات ويميز بينها وبين المتسلسلات.
- يتعرف المتتابعة الحسابية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.
- يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية، ويدخل عددًا محدودًا من الأوساط الحسابية بين عددين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.
- يتعرف المتتابعة الهندسية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.
- يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية.
- يدخل عددًا محدودًا من الأوساط الهندسية بين عددين.
- يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.
- يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.
- يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية.
- يستخدم الحاسبات فى إجراء عمليات متطلبة فى حل مشكلات رياضية وحياتية على المتتابعات والمتسلسلات.

المصطلحات الأساسية

دالة	*Function*	رمز التجميع	*Summation* (Σ)	وسط هندسى	*Geometric mean*		
حد	*Term*	متتابعة حسابية	*Arithmetic sequence*	متسلسلة هندسية	*Geometric series*		
متتابعة منتهية	*Finite sequence*	أساس المتتابعة الحسابية	*Common differnce*	متسلسلة هندسية غير منتهية	*Infinite geometric series*		
متتابعة غير منتهية	*Infinite sequence*	وسط حسابى	*Arithmetic mean*	مالانهاية	*Infinity*		
متتابعة تزايدية	*Increasing Seqence*	متسلسلة حسابية	*Arithmetic series*				
متتابعة تناقصية	*Decreasing Seqence*	متتابعة هندسية	*Geometric sequence*				
متسلسلة	*Series*	أساس المتتابعة الهندسية	*Common ratio*				

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): المتتابعات والمتسلسلات.

الدرس (١ - ٢): المتتابعات الحسابية.

الدرس (١ - ٣): المتسلسلات الحاسبية.

الدرس (١ - ٤): المتتابعات الهندسية.

الدرس (١ - ٥): المتسلسلات الهندسية.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مخطط تنظيمى للوحدة



١ - ١ المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and Series

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة
- المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية
- الحد النونى للمتتابعة
- التمثيل البيانى للمتتابعة
- المتسلسلات ورمز المجموع

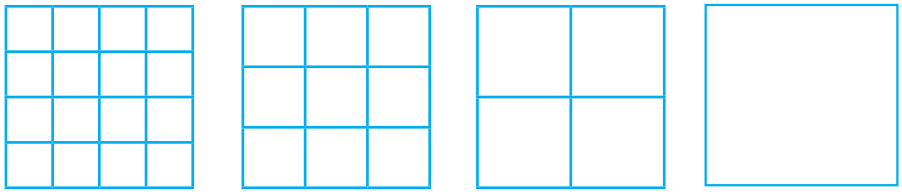
المصطلحات الأساسية

متتابعة	*Sequence*
متتابعة منتهية	*Finite Sequence*
متتابعة غير منتهية	*infinite Sequence*
مجموعة	*Set*
حد	*Term*
متسلسلة	*Series*
رمز المجموع	*Summation notation*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

النمط السابق يوضح مربع يمكن تقسيمه إلى عدد من المربعات الصغرى:

(١) أوجد عدد المربعات الصغرى التى يحتويها الشكل الخامس (**ارسم الشكل الخامس**).

(٢) هل يمكنك إيجاد عدد المربعات الصغرى بالشكل الثامن.

(٣) هل تستطيع إيجاد العلاقة بين عدد المربعات الصغرى وبين ترتيب الشكل.

تعلم

المتتابعة *Sequence*

المتتابعة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صـ$^{+}$ أو مجموعة جزئية منها ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ع حيث يرمز للحد الأول بالرمز ع$_{١}$، الحد الثانى بالرمز ع$_{٢}$، الحد الثالث بالرمز ع$_{٣}$ وهكذا... والحد النونى بالرمز ع$_{ن}$ ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتى:

(ع$_{١}$، ع$_{٢}$، ع$_{٣}$،... ، ع$_{ن}$) أو يرمز لها بالرمز (ع$_{ن}$).

تذكر أن

الدالة هى علاقة بين مجموعتين سـ، صـ بحيث كل عنصر من عناصر سـ يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة ؛ لبيان العلاقة.

مثال

١ اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

أ متتابعة الأعداد الزوجية الموجبة التى تبدأ بالعدد (٢)

ب متتابعة الأعداد المحصورة بين ١٠ ، ٣٠ والتى يقبل كل منها القسمة على ٣.

لاحظ أن

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

(٢) الرمز (ع$_{ن}$) يعبر عن المتتابعة، بينما الرمز ع$_{ن}$ يعبر عن حدها النونى.

الحل

أ (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢)

ب (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٧)

حاول أن تحل

(١) اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

أ متتابعة الأعداد الفردية السالبة التى تبدأ بالعدد (- ١).

ب متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ ، ٨١ والتى يقبل كل منها القسمة على ٥.

الحد العام لمتتابعة: *General term of a sequence*

الحد العام لمتتابعة (ويسمى أحيانًا بالحد النونى) ويكتب $ع_ن$ حيث $ع_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن فى مجال المتتابعة، ويمكن استنتاجه أحيانًا من خلال حدود معطاة للمتتابعة.

مثال ذلك:

- الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... هو $ع_ن = ٢ن$
- الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... هو $ع_ن = ٢ن - ١$
- الحد العام للمتتابعة: $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ... هو $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٢}$

تفكير ناقد: هل توجد قاعدة لإيجاد الحد العام لجميع المتتابعات؟ فسر إجابتك .

مثال

(٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى: $ع_١ = -١$ ، $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$ حيث $ن \leqslant ١$

الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فى العلاقة $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$:

بوضع ن = ١ تكون $ع_٢ = ٢ ع_١$ أى أن: $ع_٢ = ٢ \times -١ = -٢$ (بالتعويض عن $ع_١ = -١$)

بوضع ن = ٢ تكون $ع_٣ = ٢ ع_٢$ أى أن: $ع_٣ = ٢ \times -٢ = -٤$ (بالتعويض عن $ع_٢ = -٢$)

بوضع ن = ٣ تكون $ع_٤ = ٢ ع_٣$ أى أن: $ع_٤ = ٢ \times -٤ = -٨$ (بالتعويض عن $ع_٣ = -٤$)

بوضع ن = ٤ تكون $ع_٥ = ٢ ع_٤$ أى أن: $ع_٥ = ٢ \times -٨ = -١٦$ (بالتعويض عن $ع_٤ = -٨$)

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هى: (- ١ ، - ٢ ، - ٤ ، - ٨ ، - ١٦)

حاول أن تحل

(٢) اكتب الستة حدود الأولى للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى: $ع_١ = ٣$ ، $ع_ن = ٢ ع_{ن-١}$ حيث $ن \leqslant ٢$

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية: *Finite seqence and infinite sequence*

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيًا (أى يمكن حصره أو عده) وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منتهٍ (عدد لا نهائى من العناصر لا يمكن حصره).

مثال

(٣) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

أ $ع_ن = ٢ن - ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).

ب $ع_ن = ن^٢$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

الحل

أ بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

∴ $ع_١ = ٢(١) + ١ = ٣$ ، $ع_٢ = ٢(٢) + ١ = ٥$

$ع_٣ = ٢(٣) + ١ = ٧$ ، $ع_٤ = ٢(٤) + ١ = ٩$

$ع_٥ = ٢(٥) + ١ = ١١$ ، ∴ المتتابعة هى: (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١) متتابعة منتهية

ب بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ،

∴ $ع_١ = (١)^٢ = ١$ ، $ع_٢ = (٢)^٢ = ٤$

$ع_٣ = (٣)^٢ = ٩$ ، $ع_٤ = (٤)^٢ = ١٦$

$ع_٥ = (٥)^٢ = ٢٥$ ، ∴ المتتابعة هى: (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ،) متتابعة غير منتهية.

حاول أن تحل

(٣) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

أ $ع_ن = ١ - ٣ن$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).

ب $ع_ن = ن^٣$ (إلى عدد غير منتهٍ من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

المتسلسلات ورمز التجميع *Series and summation notation*

المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة.

فمثلا: (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) هى متتابعة بينما ٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ... هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة، ويمكن استخدام رمز التجميع " Σ " ويقرأ (سيجما) لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

مثال

(٤) اكتب مفكوك كلًّا من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك.

أ $\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢$ ب $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر - ١)$

الحل

أ بوضع ر = ١ يكون $ع_١ = (١)^٢ = ١$ ، بوضع ر = ٢ يكون $ع_٢ = (٢)^٢ = ٤$

بوضع ر = ٣ يكون $ع_٣ = (٣)^٢ = ٩$ ، بوضع ر = ٤ يكون $ع_٤ = (٤)^٢ = ١٦$

أى أن المتسلسلة هى (١ + ٤ + ٩ + ١٦) ويكون $\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢ = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠$

ب بوضع ر = ٣ يكون ع١ = ٢ × ٣ − ١ = ٥ ، بوضع ر = ٤ يكون ع٢ = ٢ × ٤ − ١ = ٧

بوضع ر = ٥ يكون ع٣ = ٢ × ٥ − ١ = ٩ ، بوضع ر = ٦ يكون ع٤ = ٢ × ٦ − ١ = ١١

بوضع ر = ٧ يكون ع٥ = ٢ × ٧ − ١ = ١٣

أى أن المتسلسلة هى (٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣) ويكون $\sum_{ر=٣}^{٧}$ (٢ر − ١) = ٤٥

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة:



تتيح لنا الآلات الحاسبة إنجاز الكثير من العمليات الحسابية المعقدة بسرعة ودقة تامة بشرط التأكد من بيانات الإدخال، ومن بين هذه العمليات الهامة هو إيجاد مجموع متسلسلة، فعلى سبيل المثال يمكن التحقق من مجموع المتسلسلة فى السؤال السابق (ب) على النحو التالى:

(١) نضغط على مفتاح رمز التجميع $\sum$ (log) حسب اللون المحدد لذلك

(٢) نكتب قاعدة المتباينة (٢ر − ١) كالآتى:

ابدأ ← 1 − (x)) ALPHA 2

(٣) نستخدم المفتاح (Replay) للتنقل كالآتى:

نكتب عدد حدود المتتابعة (٧) فى التنقل لأعلى، 7

نكتب رتبة الحد الذى نبدأ به وهو فى هذا المثال (٣) فى التنقل لأسفل 3

(٤) نضغط على مفتاح الإدخال = ليعطى على الشاشة الناتج ٤٥ وهو مطابق لناتج الجمع السابق.

حاول أن تحل

(٤) اكتب مفكوك كلًّا من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

أ $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٣ر − ٢)

ب $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر + ١)^{٢}

ج $\sum_{ر=٥}^{٩}$ ٣ × ٢$^{ر-١}$

تمـــاريـن ١ - أ

أكمل ما يأتى:

١ الحد الخامس للمتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ٢ن - ١$ هو

٢ الحد الرابع فى للمتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^٢ + ٣$ هو

٣ فى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_{ن+١} = ن\ ع_ن$ إذا كان $ع_١ = ١$ فإن $ع_٢ =$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٤ الحد الخامس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥ هو :

أ ٥ ب ٢٥ جـ ٢٠ د ١٠

٥ الحد العاشر من المتتابعة التى حدها النونى: $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in صـ^+$ هو:

أ $\frac{-٤}{٥}$ ب $\frac{-١}{٥}$ جـ $\frac{١}{٥}$ د $\frac{٤}{٥}$

٦ قاعدة المتتابعة $((٢ \times ٣)، (٣ \times ٤)، (٤ \times ٥)، (٥ \times ٦)، ...)$ هى:

أ $(ن - ١)(ن + ١)$ ب $ن(ن + ١)$ جـ $٢ن(ن + ١)$ د $(ن + ١)(ن + ٢)$

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧ بين أى المتتابعات الآتية منتهية أو غير منتهية:

أ $(١، ٤، ٧، ١١، ...)$

ب $(٣، ٥، ٧، ٩، ...، ٢١)$

جـ المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^٢ - ١، ن \in صـ^+$

د المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = \frac{٢}{ن} + ٣، ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$

٨ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:

أ $ع_ن = ن + ن^٢$ ب $ع_ن = \frac{١}{٥ - ٢ن}$ جـ $ع_ن = (\frac{١}{٣})^ن$ د $ع_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

٩ اكتشف النمط ثم اكتب الحد التالى

أ $٦٥، ٦٩، ٧٣، ٧٧، ٨١، ...$ ب $٣، -٦، ١٢، -٢٤، ٤٨، ...$

جـ $\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}، \frac{١}{١٦}، \frac{١}{٣٢}، ...$ د $١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ...$

١٠ **الربط بالرياضة:** يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول، ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميًا.

أ اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

ب أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

جـ أوجد الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع.

د في أى يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة؟ وضح إجابتك.

(١١) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{ن=١}^{٥} (٣ن - ٢)$

ب $\sum_{ن=١}^{٨} \left((-١)^{ن} + ٤ن\right)$

جـ $\sum_{ن=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ن-١}$

د $\sum_{ن=١}^{\infty} (\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١})$

(١٢) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

أ $\sum_{ن=٣}^{٧} (٢ن + ٣)$

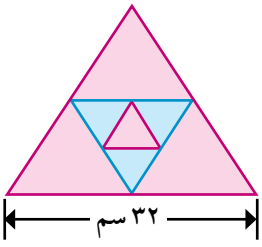
ب $\sum_{ن=٢}^{٦} (ن^{٢} - ٢)$

جـ $\sum_{ن=١}^{٥} ٣ \times (\frac{١}{٢})^{ن+١}$

د $\sum_{ن=٣}^{٦} (\frac{١}{ن} + ٢)$

(١٣) **الربط بالتعدين:** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠٪ سنويًا من معدل إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. اكتب الخمسة حدود الأولى من متتابعة الإنتاج، ثم أوجد هذا المجموع.

(١٤) **الربط بالهندسة:** يمثل الشكل المقابل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٢سم نصفت أضلاعه الثلاثة، ورسم المثلث الداخلى، واستمر هذا النمط نحو الداخل حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.



أ اكتب المتسلسلة التي تمثل محيطات المثلثات باستخدام رمز التجميع.

ب أوجد محيط المثلث الرابع.

جـ أوجد بالسنتيمترات مجموع محيطات الأربع مثلثات الأولى من هذا النمط.

(١٥) **الربط بالتكنولوجيا:** استخدم كريم البريد الإلكترونى فى إرسال رسالة إلى ثلاثة من أصدقائه، ومن ثم قام كل منهم بإرسال نفس الرسالة إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال نفس الرسالة بهذا النمط.



(علمًا بأن كل شخص تسلم هذه الرسالة مرة واحدة فقط)

أ اكتب المتسلسلة باستخدام رمز التجميع.

ب أوجد عدد الأشخاص التى ستصلهم هذه الرسالة فى المرحلة الخامسة.

جـ أوجد مجموع جميع الأشخاص الذين تداولوا هذه الرسالة حتى المرة الخامسة.

١ - ٢ المتتابعة الحسابية

Arithmetic Sequence

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الحسابية.
- التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية.
- الحد النونى للمتتابعة الحسابية.
- تعيين المتتابعة الحسابية.
- تعريف الوسط الحسابى.
- إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

المصطلحات الأساسية

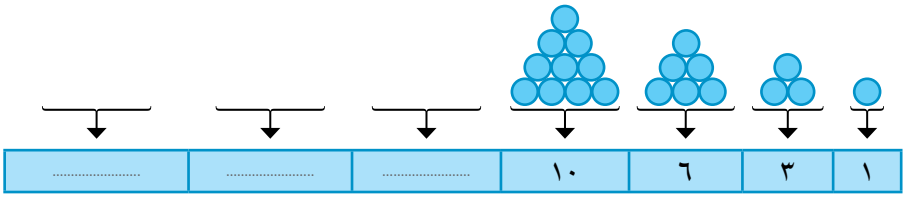
- نمط *Pattern*
- متتابعة حسابية *Arithmetic sequence*
- حد نونى *nth Term*
- أساس المتتابعة الحسابية *Common difference*
- رتبة الحد *Order of the term*
- وسط حسابى *arithmetic mean*

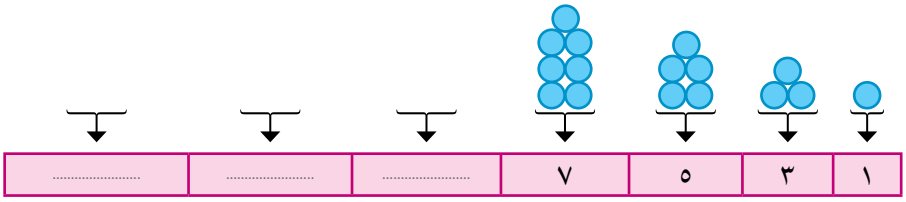
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية .
- برامج رسومية.

نشاط

ادرس كلًّا من النمطين التاليين، ثم أكمل كل منهما حتى الشكل السابع.





أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) ما أوجه الشبه والاختلاف بين النمطين الأول والثانى؟

(٢) اكتب المتتابعتين الممثلتين للنمطين السابقين.

(٣) ماذا تلاحظ على قيم المتتابعة فى النمط الثانى ؟ هل يمكنك استنتاج قاعدة للربط بين حدود هذه المتتابعة؟ اكتب هذه القاعدة.

من النشاط السابق نجد أن:

- التزايد فى قيم عناصر النمط الأول يتغير، ولكن التزايد فى قيم عناصر النمط الثانى هو تزايد بمقدار ثابت.
- المتتابعة الممثلة لعناصر النمط الثانى هى: (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حيث كل حد فيها يزيد عن الحد الذى يسبقه مباشرة بمقدار ثابت قيمته ٢، ولذلك سميت بالمتتابعة الحسابية.

تعريف ١

المتتابعة الحسابية *Arithmetic Sequence*

هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدرًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ى).

أى أن: ى = $ع_{ن+١} - ع_{ن}$ لكل ن ∈ صـ$^{+}$ ويمكن تكوينها بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ى).

مثال

(١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

(أ) (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩)

(ب) $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦})$

(جـ) $ع_ن = ٢ن + ٣$

(د) $ع_ن = \frac{٣}{ن} + ٢$

الحل

(أ) ∵ $ع_٢ - ع_١ = ١٠ - ٧ = ٣$ ، $ع_٣ - ع_٢ = ١٣ - ١٠ = ٣$

وبالمثل $ع_٤ - ع_٣ = ع_٥ - ع_٤ = ٣$

∴ $ع_٢ - ع_١ = ع_٣ - ع_٢ = ع_٤ - ع_٣ = ع_٥ - ع_٤ = ٣$ ∴ المتتابعة حسابية أساسها = ٣

(ب) ∵ $ع_٢ - ع_١ = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$ ، $ع_٣ - ع_٢ = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

∴ $ع_٢ - ع_١ \neq ع_٣ - ع_٢$ ∴ المتتابعة ليست حسابية.

(جـ) ∵ $ع_{ن+١} - ع_ن = (٢(ن + ١) + ٣) - (٢ن + ٣) = ٢ن + ٢ + ٣ - ٢ن - ٣ = ٢$

∴ المتتابعة حسابية أساسها ٢

(د) ∵ $ع_{ن+١} - ع_ن = \left(٢ + \frac{٣}{ن+١}\right) - \left(٢ + \frac{٣}{ن}\right)$

$= \frac{٣}{ن+١} - \frac{٣}{ن} = \frac{٣ن - ٣(ن+١)}{ن(ن+١)} = \frac{-٣}{ن(ن+١)}$ لا تساوى مقدارا ثابتًا

∴ المتتابعة ليست حسابية.

حاول أن تحل

(١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

(أ) (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨)

(ب) (-١٤ ، -٨ ، -٢ ، ٤ ، ١٠)

(جـ) $ع_ن = ٢ن + ٣$

(د) $ع_ن = ١ - \frac{٣}{٢}ن$

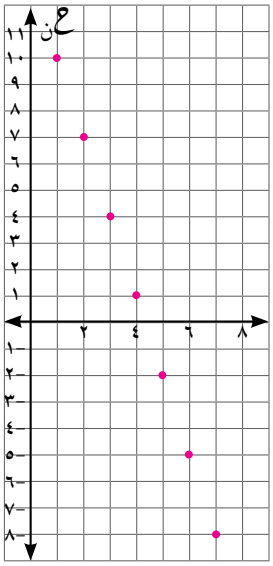
المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

المتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ تكون تزايدة إذا كان أساسها موجبًا (ى > صفر) مثل: (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ،)

والمتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ تكون تناقصية إذا كان أساسها سالبًا (ى < صفر) مثل: (٤ ، -١ ، -٦ ، -١١ ،)

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية: *Graphical representation of arithmetic Sequence*

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية (١٠ ، ٧ ، ٤ ، ...) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.



الحل

∵ ى = ع٢ - ع١ = ٧ - ١٠ = -٣

∴ الحدود الأربعة التالية هى: ١ ، -٢ ، -٥ ، -٨

مجال المتتابعة هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

مدى المتتابعة هو {١٠ ، ٧ ، ٤ ، ١ ، -٢ ، -٥ ، -٨}

و يمثل الشكل المجاور التمثيل البيانى للمتتابعة.

نلاحظ من الشكل أن:

النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة مما يعنى أن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ صـ+ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

تفكير ناقد: ماذا تتوقع أن تكون المتتابعة الحسابية (ع ن) إذا كانت (ى = ٠) ؟ فسر إجابتك.

حاول أن تحل

(٢) فى المتتابعة (ع ن) حيث ع ن = ٣ن - ٥

أ أثبت أن (ع ن) متتابعة حسابية، وأوجد أساسها.

ب بين أن هذه المتتابعة تزايدية.

جـ أوجد حدها الخامس عشر.

د إذا كان ع ن = ٨٥ ، فما قيمة ن؟

إيجاد الحد النونى للمتتابعة الحسابية: *Finding the n^{th} term of an arithmetic sequence*

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية (ع ن) التى حدها الأول أ وأساسها ى كالآتى:

ع١ = أ ، ع٢ = أ + ى ، ع٣ = أ + ٢ى

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو:

$$ع_ن = أ + (ن - ١) ى$$

مثال

(٣) فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ، ١٠٠)

أ أوجد الحد العاشر

ب أوجد عدد حدود هذه المتتابعة

الحل

∵ المتتابعة حسابية ∴ أ = ١٣ ، ى = ١٦ - ١٣ = ٣

أ ∵ ع ن = أ + (ن - ١) ى ∴ ع١٠ = ١٣ + (١٠ - ١) × ٣

= ١٣ + ٩ × ٣ = ١٣ + ٢٧ = ٤٠

ب المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما ع ن = ١٠٠

∵ ع ن = أ + (ن - ١) ى ∴ ١٠٠ = ١٣ + (ن - ١) × ٣ ∴ ١٠٠ = ١٣ + ٣ن - ٣

أى أن: ٣ن = ١٠٠ - ١٠ = ٩٠ ∴ ن = ٣٠

حاول أن تحل

(٣) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٦٥) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

تعيين المتتابعة الحسابية: *Identfing the arithmetic Sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول والأساس.

مثال

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية (ع$_ن$) التى فيها ع$_٧$ = ١٨ ، ع$_{١٥}$ = ٣٤

الحل

نعلم من معطيات المسألة أن: ع$_٧$ = ١٨ ، ع$_{١٥}$ = ٣٤

∵ ع$_ن$ = أ + (ن − ١) ء ∴ ١٨ = أ + (٧ − ١) ء ومنها:

∴ أ + ٦ء = ١٨ (١)

بالمثل ٣٤ = أ + (١٥ − ١) ء

، أ + ١٤ء = ٣٤ (٢)

وبحل المعادلتين (١)، (٢) ء = ٢

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ أ + ٦ × ٢ = ١٨ ∴ أ = ١٨ − ١٢ = ٦

∴ المتتابعة الحسابية هى (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...)

لاحظ أن

للحصول على قيمة ء فإن

أ + ١٤ء = ٣٤

−أ − ٦ء = −١٨

وذلك بضرب طرفى المعادلة الأولى فى (−١)

بجمع المعادلتين: ٨ء = ١٦

بقسمة طرفى المعادلة على ٢

ء = ٢

استخدام الآلة الحاسبة:



للتأكد من صحة حل المعادلتين: أ + ٦ء = ١٨ ، أ + ١٤ء = ٣٤

باستخدام الحاسبة العلمية نتبع الخطوات التالية:

إدخال البيانات

نضغط على مفتاح العمليات MODE ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها أو بالضغط على المفتاح EXE فى بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية anX + bnY = cn وذلك بالضغط على المفتاح

ندخل معاملات (X) ، (Y) ، والحد المطلق (cn) بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية مباشرة على النحو التالى:

ابدأ ← 1 = 6 = 18 = 1 = 1 4 = 3 4 =

استدعاء النواتج:

- بالضغط على المفتاح = للمرة الأولى يعطى قيمة المتغير الأول، وليكن (X) ويكون الناتج X = 6
- بالضغط على المفتاح = مرة أخرى يعطى قيمة المتغير الثانى، وليكن (Y) ويكون الناتج Y = 2

للخروج من البرنامج: نضغط على المفاتيح: MODE 1 ← ابدأ

حاول أن تحل

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية (ع$_ن$) التى فيها ع$_٦$ = ١٧ ، ع$_٣$ + ع$_١٠$ = ٣٧

الأوساط الحسابية *Arithmetic means*

تعلم أن الوسط الحسابى (المتوسط) للعددين أ، ب هو $\frac{أ+ب}{٢}$

وباعتبار أن: (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥) متتابعة حسابية

- الوسط الحسابى للحدين الأول والثالث = $\frac{٩+١٧}{٢}$ = ١٣ ماذا تلاحظ؟
- الوسط الحسابى للحدين الثانى والرابع = $\frac{١٣+٢١}{٢}$ = ١٧ ماذا تلاحظ؟

تعريف ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن ب تعرف بالوسط الحسابى بين العددين أ، جـ حيث: ب − أ = جـ − ب أى أن: ٢ب = أ + جـ فتكون ب = $\frac{أ+جـ}{٢}$

لذلك فإن (أ ، $\frac{أ+جـ}{٢}$ ، جـ) متتابعة حسابية.

ويمكن إدخال عدة أوساط حسابية: س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ...، س$_ن$ بين العددين أ، ب بحيث تكون (أ ، س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ...، س$_ن$ ، ب) متتابعة حسابية.

تعبير شفهى: أكمل:

(١) إذا كونت (٣، ٧، ١١، ...، ٤٣ ، ٤٧) متتابعة حسابية فإن: ٧، ١١، ١٥، ...، ٤٣ تسمى

(٢) عدد الأوساط الحسابية = عدد حدود المتتابعة

(٣) عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد أوساط هذه المتتابعة

تذكر أن

الوسط الحسابى لعدة كميات يساوى مجموع هذه الأعداد مقسومًا على عددها.

مثال

أوجد الوسط الحسابى للأعداد: ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٨ ، ٩

الوسط الحسابى

$= \frac{٤+٦+٧+٨+٨+٩}{٦}$

$= ٧$

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين:

Insert an infinite number of arithmetic means between two number

مثال

(٥) أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

أولًا: نوجد عدد حدود المتتابعة

نوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة لذا فإن عدد حدود المتتابعة الحسابية

ن = ٢ + ٥ = ٧

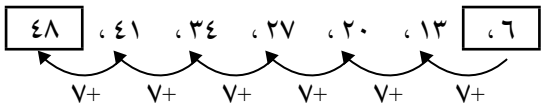
ثانيًا: نوجد قيمة ء: الحد النونى للمتتابعة الحسابية: ع$_ن$ = أ + (ن − ١) ء

بالتعويض عن: أ = ٦ ، ع$_ن$ = ٤٨ ، ن = ٧

٤٨ = ٦ + (٧ − ١) ء

أى أن: ٦ء = ٤٢ بقسمة الطرفين على ٦ ∴ ء = ٧

ثالثًا: نستخدم قيمة ء لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة



الأوساط المطلوبة هى: ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١

حاول أن تحل

(٥) أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٣ ، ٤٨

تمـــاريـن ١ - ٢

حدد أيًّا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها غير حسابية، ثم أوجد الأساس فى حال كونها حسابية:

(١) (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤)

(٢) (٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٤ ، ٣٨)

(٣) (-٥ ، -١١ ، -١٧ ، -٢٣ ، -٢٩)

(٤) (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

(٥) (س + ٢ص، ٣س + ٣ص، ٥س + ٤ص) حيث س، ص كميتان موجبتان

اكتب الخمسة حدود الأولى للمتتابعة الحسابية فى كل من الحالات الآتية:

(٦) أ = ٢ ، ء = ٥

(٧) أ = ٧ ، ء = -٣

(٨) أ = -٤ ، ء = $\frac{١}{٤}$

أكمل ما يأتى:

(٩) الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو

(١٠) الحد الحادى عشر من المتتابعة (ع$_ن$) حيث ع$_ن$ = ٣ن - ٥ هو

(١١) الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ...) هو

(١٢) الحد النونى للمتتابعة الحسابية ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، ...) هو

(١٣) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو

(١٤) إذا كان الوسط الحسابى للعددين س، ٢٦ هو ٢١ فإن س تساوى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٥) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...)

ب (-١١ ، -١٥ ، -١٩ ، -٢٣ ، ...)

ج ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ...)

د ($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ ، $\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$ ، ...)

(١٦) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى:

أ $(ع_ن) = (\frac{ن+١}{ن})$

ب $(ع_ن) = ((ن+١)^٢)$

ج $(ع_ن) = (\frac{٣}{ن}(ن+٢))$

د $(ع_ن) = \frac{ن^٣-١}{ن^٢+ن+١}$

(١٧) إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حسابية حيث $ع_ن = ٣ن + ٢$ فإن الوسط الحسابى بين $ع_٥$ ، $ع_{١١}$ يساوى:

أ ٨ ب ١٦ ج ٢٢ د ٢٦

(١٨) إذا كان $٢أ + ١$ ، $٥أ - ١$ ، $٦أ + ٣$ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

اكتشف الخطأ:

(١٩) يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه يساوى الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة أى أن $ء = ع_ن - ع_{ن-١}$ لكل $ن \in صـ^+$

(٢٠) ليس بالضرورة أن تكون النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة.

(٢١) تعطى العلاقة بين ن ، $ع_ن$ فى المتتابعة الحسابية كالآتى $ع_ن = أن + ب$ حيث أ ، ب ثابتان ، ب هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة .

(٢٢) إذا أدخلنا ن وسطًا حسابيًا بين عددين متتاليين فإن عدد حدود هذه المتتابعة يساوى ن - ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٢٣) أوجد الحدين الثانى عشر والعشرون من المتتابعة الحسابية (٤ ، ٧ ، ١٠ ، ...)

(٢٤) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، - ١٣٣)

(٢٥) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة (٢ + ٥ن) ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من هذه المتتابعة .

(٢٦) $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ع_١ = -٥١$ ، $ع_{٢٢} = -١٥٦$ ، أوجد أساس هذه المتتابعة.

(٢٧) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع يساوى ١٨، وحدها السابع يساوى ٢٧

(٢٨) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ع_ن = ٣٩$ ، $ع_{٢ن} = ٧٩$، ما قيمة ن ؟ أوجد المتتابعة.

(٢٩) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر يساوى ثلاثة أمثال حدها الثانى

(٣٠) $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ع_١ + ع_٢ = ٩$ ، $ع_٥ = ٢٢$. أوجد هذه المتتابعة

(٣١) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، والنسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

(٣٢) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، ومجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ ، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

(٣٣) إذا كانت ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمتى أ ، ب.

(٣٤) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ٤أ ، ٢ب هو ٢٠ ، فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

(٣٥) إذا كانت (٨ ، أ ، ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حدا فأوجد قيمتى أ ، ب

(٣٦) أدخل ١٦ وسطا حسابيا بين ٢٧ ، - ٢٤

(٣٧) فى المتتابعة الحسابية (٥ س + ٦ ، ٣ س + ١٥ ، ... ، ٥٠ س – ٩ ، ٤٠ س + ١٦) أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدود المتتابعة.

(٣٨) **الربط بالفيزياء:** بدأ كريم فى قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة فى منحدر، فقطع فى الثانية الأولى ١٠٠ سم، وفى كل ثانية تالية يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم . أوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية العاشرة .

(٣٩) **الربط بالتجارة:** اشترى رجل دراجة بخارية، واتفق مع البائع على أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى هو ١٢٠ن + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه . أوجد عدد هذه الأقساط.

(٤٠) **تفكير إبداعى:** متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة.

نشاط

الربط بالصحة يتناول مريض ٢١ حبة من عقار طبى فى الأسبوع، وقد طلب منه الطبيب أن يقلل استخدام العقار بمعدل ٣ حبات فى الأسبوع التالى عن الأسبوع الذى يسبقه مباشرة.

(١) أوجد عدد حبات العقار التى سوف يتناولها المريض فى الأسبوع الخامس.

(٢) بعد كم أسبوعًا سوف يتوقف المريض عن تناول هذا العقار؟

(٣) بم تنصح المرضى الذين يتعاطون العقاقير الطبية دون استشارة الطبيب؟

١ - ٣ المتسلسلات الحسابية

Arithmetic Series

سوف تتعلم

- مفهوم متسلسلة حسابية
- إيجاد مجموع ن حدا من متتابعة حسابية بمعلومية حديها الأول والأخير .
- إيجاد مجموع ن حدا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة حسابية. *Arithmetic series*
- رمز التجميع

Summation notation (Σ)

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

مجموع المتسلسلة الحسابية: *The sum of arithmetic series*



كارل جاوس – عالم ألماني
١٧٧٧م – ١٨٥٥م

لقد أثار العالم الألمانى كارل جاوس (Karl Gauss) دهشة معلمه، وهو فى سن السابعة من عمره عندما توصل إلى إيجاد ناتج جمع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ ذهنيًا وبطريقة سريعة حيث لاحظ أن المجموع يساوى ناتج ٥٠ زوجًا من الأعداد التى ناتج كل منها ١٠١

أى يساوى: ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠

فهل يمكنك إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ٢٠ ذهنيًا؟

تعريف

المتسلسلة الحسابية *Arithmetic series*

هى عملية جمع حدود المتتابعة الحسابية

فمثلا: مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١)

تكتب جـ٥ = ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١

مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة حسابية

Sum of first n terms of an arithmetic series

أولًا: إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير

إذا كان لدينا متسلسلة حسابية حدها الأول أ ، أساسها ى، حدها الأخير ل وعدد حدودها ن فإن مجموع ن حدًا من هذه المتسلسلة يرمز له بالرمز جـن حيث:

جـن = أ + (أ + ى) + (أ + ٢ى) + ... + (ل - ى) + ل (١)

ويمكن التعبير عن هذا المجموع بصورة أخرى كالآتى:

جـن = ل + (ل - ى) + (ل - ٢ى) + ... + (أ + ى) + أ (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن:

٢جـن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) +...+ (أ + ل) إلى ن من المرات

أى أن ٢جـن = ن (أ + ل) **وبقسمة الطرفين على ٢**

$$جـن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

مثال

① استخدام رمز التجميع Σ : أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٤} (٤ر - ٣)$

الحل

حيث أن المقدار داخل رمز المجموع من الدرجة الأولى فهو يمثل متتابعة حسابية

ن = ٢٤ − ٥ + ١ = ٢٠ نوجد عدد حدود المتتابعة

$ع_ن = ٤ن - ٣$ الحد النونى للمتتابعة

$ع_٥ = ٤ \times ٥ - ٣ = ١٧$ ، $ع_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ - ٣ = ٩٣$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (١٧ + ٩٣) = ١١٠٠$ بالتعويض عن: أ = ١٧ ، ل = ٩٣ ، ن = ٢٠

حاول أن تحل

① أوجد:

أ $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$ ب $\sum_{م=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥م)$

مثال

② أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢

الحل

$ل = أ + (ن - ١)ء$ الحد النونى للمتتابعة

$٦٢ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$ بالتعويض عن أ = ٢، ء = ٣، ل = ٦٢

أى أن: $٣ن - ٣ + ٢ = ٦٢$

$٣ن - ١ = ٦٢$ فتكون ن = ٢١

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ صيغة المجموع

$جـ_{٢١} = \frac{٢١}{٢} (٢ + ٦٢) = ٦٧٢$ بالتعويض عن أ = ٢، ن = ٢١، $ع_ن$ = ٦٢

حاول أن تحل

② أوجد:

أ مجموع المتسلسلة الحسابية ٨٩ + ٨٥ + ٨١ ، + ٣٣

ب عدد حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى ٣ وحدها الأخير يساوى ٣٩ ومجموع ن حدا الأولى منها يساوى ٢١٠ .

تذكر أن

$(ع_ن)$ قاعدة المتسلسلة

$\sum_{ر=١}^{ن}$ رمز التجميع، ن الأخيرة، ر = ١ قيمة ر الأولى

ثانيًا: إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

نعلم أن $ل = أ + (ن - ١)ء$ ، $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

وبالتعويض من العلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + أ + (ن - ١)ء]$ أى أن: $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)ء]$

مثال

(٣) فى المتسلسلة الحسابية ٥ + ٨ + ١١ + ... أوجد:

أ مجموع ٢٠ حدا الأولى منها.

ب مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

ج مجموع حدود المتسلسلة بدءً من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

الحل

$أ = ٥ ، ء = ٨ - ٥ = ٣$

أ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) ء]$ صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} \times [٢ \times ٥ + (٢٠ - ١) \times ٣]$ بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٨ – ٥ = ٣

$جـ_ن = ١٠ (١٠ + ١٩ \times ٣)$

$= ١٠ \times ٦٧ = ٦٧٠$ بالتبسيط

ب $ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ الحد النونى للمتتابعة

$ع_٧ = أ + ٦ ء$

$= ٥ + ٦ \times ٣ = ٢٣$ بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٣ ، ن = ٧

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢} \times [٢ ح_٧ + (١٠ - ١) \times ٣]$ بالتعويض فى صيغة المجموع

$جـ_{١٠} = ٥ \times [٢ \times ٢٣ + ٢٧]$

$= ٥ \times ٧٣ = ٣٦٥$ بالتبسيط

ج مجموع حدود المتسلسلة ابتداء من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ الحد النونى للمتتابعة

$ع_{١٠} = أ + ٩ ء$

$= ٥ + ٩ \times ٣ = ٣٢$ بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٣

$ع_{٢٠} = أ + ١٩ ء = ٥ + ١٩ \times ٣ = ٦٢$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ صيغة المجموع (ن = ٢٠ – ١٠ + ١ = ١١)

$جـ_{١١} = \frac{١١}{٢} (ع_{١٠} + ع_{٢٠})$

$= \frac{١١}{٢} (٣٢ + ٦٢) = ٥١٧$ بالتعويض عن $ع_{١٠}$ = ٣٢ ، $ع_{٢٠}$ = ٦٢، ن = ١١

فكر:

هل توجد حلول أخرى لإيجاد مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

حاول أن تحل

(٣) فى المتسلسلة الحسابية ٩ + ١٢ + ١٥ + ... أوجد:

أ مجموع ١٥ حدًّا الأولى منها.

ب مجموع حدود المتسلسلة ابتداءً من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر.

ج عدد الحدود التى مجموعها يساوى ٧٥٠ ابتداءً من الحد الأول.

تكوين المتتابعة الحسابية *Constracting the arithmetic sequence*

مثال

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها: ع١ = ١١، عن = ٨٧، جـن = ٩٨٠

الحل

(أ) إيجاد قيمة ن

جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) — صيغة المجموع

٩٨٠ = $\frac{ن}{٢}$ (١١ + ٨٧) — بالتعويض عن ع١ = ١١، عن = ٨٧، جـن = ٩٨٠

٩٨ × $\frac{ن}{٢}$ = ٩٨٠ فيكون: ن = ٢٠ حدا — بالتبسيط ع٢٠ = ٨٧

(ب) إيجاد قيمة ء

عن = أ + (ن - ١) ء — الحد النونى

٨٧ = ١١ + ١٩ ء — بالتعويض عن ع١ = ١١، ن = ٢٠، عن = ٨٧

١٩ء = ٨٧ - ١١ = ٧٦ — بالتبسيط وبالقسمة على ١٩

∴ ء = ٤

(ج) تكوين المتتابعة: ع٢ = ١١ + ٤ = ١٥ ، ع٣ = ١٥ + ٤ = ١٩

المتتابعة الحسابية هى (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ، ٨٧)

حاول أن تحل

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها

(أ) ع١ = ٢٣ ، عن = ٨٦ ، جـن = ٥٤٥

(ب) ع١ = ١٧ ، عن = - ٩٥ ، جـن = - ٥٨٥

مثال

(٥) الربط بالاستثمار: أودع كريم فى أول يناير عام ٢٠١٥ مبلغ ١٢٠ جنيهًا فى صندوق توفير البريد، وفى أول كل شهر بعد ذلك يزيد ما يودعه بمقدار ١٥ جنيهًا عن الشهر السابق.

(أ) أوجد المبلغ الذى أودعه فى أول شهر ديسمبر من نفس العام.

(ب) أوجد مجموع ما أودعه كريم ابتداءً من أول يناير وحتى نهاية ديسمبر من نفس العام.

الحل

المبالغ الشهرية التى أودعها كريم تمثل متتابعة حسابية حدها الأول أ = ١٢٠ ، وأساسها ء = ١٥ ، المدة الزمنية من أول يناير عام ٢٠١٥ وحتى نهاية ديسمبر عام ٢٠١٥ تكون فيها ن = ١٢

(أ) بالتعويض عن: أ = ١٢٠ ، ء = ١٥ ، ن = ١٢ — فى القانون: عن = أ + (ن - ١) ء

ع١٢ = أ + (١٢ - ١)ء — فتكون ع١٢ = ١٢٠ + ١١ × ١٥ = ٢٨٥ جنيهًا.

(ب) بالتعويض عن: أ = ١٢٠ ، ء = ١٥ ، ن = ١٢ — فى القانون جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) ء]

جـ١٢ = $\frac{١٢}{٢}$ (٢ × ١٢٠ + ١١ × ١٥) = ٢٤٣٠ جنيهًا .

فكر: هل يمكنك إيجاد جملة ما أودعه كريم خلال العام باستخدام قانون مجموع المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول والأخير وعدد الحدود؟ وضح ذلك لإيجاد المجموع.

حاول أن تحل

(٥) راتب سنوى: بدأ كريم العمل براتب سنوى قدره ١٩٢٠٠ جنيه، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيهًا، فكم يكون مجموع ما يحصل عليه من رواتب فى نهاية السنة العاشرة؟

تمـــاريـن ١ – ٣

أكمل مايأتى:

(١) مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التى تبدأ بالعدد ١ وتنتهى بالعدد ٢٠ تساوى

(٢) مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى

(٣) مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى

(٤) مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى

(٥) مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٨ هو

(٦) $\sum_{ك=١}^{٥} (٢ك + ١)$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ١)$ يساوى:

أ ٢٥ ب ٣٠ ج ٣٥ د ٢٤

(٨) صيغة المتسلسلة: ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن – ١ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ر - ١)$ ب $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر - ١)$ ج $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر + ١)$ د $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ر + ١)$

(٩) صيغة المتسلسلة: ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ر + ٢)$ ب $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ر + ٣)$ ج $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ر + ١)$ د $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ٤)$

اكتشف الخطأ

(١٠) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (- ١٢ ، - ٨ ، - ٤ ، ... ، ١٢) يعطى عددًا صحيحًا موجبًا.

(١١) مجموع الستة حدود الأولى فقط من المتتابعة الحسابية (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ... ، -٢٤) يساوى صفرًا.

أجب عن الأسئلة الآتية

(١٢) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ...)

(١٣) أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى لمتتابعة حسابية حدها الأول ٤ وحدها الخامس عشر ٢٦.

(١٤) أوجد مجموع الأعداد الزوجية من ٢ إلى ٤٠.

(١٥) أوجد مجموع العشرين حدا الأولى للمتسلسلة الحسابية (٦ + ٤ + ٢ + ...).

(١٦) أوجد مجموع ٣٠ حدا الأولى من المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن$ = (٢ن + ٣).

(١٧) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

(١٨) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها مساويًا ٤٥٦.

(١٩) كم حدًّا يلزم أخذها من المتتابعة (-١٦ ، -١٤ ، -١٢ ، ...) ابتداء من الحد الأول؛ لكي يكون مجموعها صفرًا.

(٢٠) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليتلاشى المجموع.

(٢١) ادخار: يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغًا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. أوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يومًا.

(٢٢) المسرح المدرسى: مسرح مدرسى يتسع لـ ١٦ صفًّا ، فإذا كان الصف الأول يحتوى على ١٦ مقعدًا، وكل صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذى يسبقه مباشرة بمقدار ٤ مقاعد. كم عدد المقاعد بهذا المسرح؟

(٢٣) الربط بالغذاء: يمتلك كريم محلًّا تجاريًّا للسلع الغذائية، ويقوم برص ٧٨ علبة من علب التونة فى صفوف بحيث يضع فى الصف السفلى ١٢ علبة، والصف الذى يليه ١١ علبة، والصف الذى يليه ١٠ علب، وهكذا حتى الصف الأخير الذى يضع فيه علبة واحدة. أوجد عدد هذه الصفوف.

(٢٤) قرض: اقترض رجل مبلغًا من المال، واتفق على أن يقوم بسداده على ٨ أقساط، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض.

(٢٥) صيانة: أسندت إحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها، وحددت موعدًا لتسليم المبنى وكان من بين شروط التعاقد أنه فى حالة التأخير عن تسليم المبنى أن يدفع ١٠٠٠ جنيه غرامة عن اليوم الأول، وتزداد ١٠٠ جنيه عن كل يوم تالٍ له، فإذا تأخر المقاول عن التسليم لمدة ٦ أيام ، فكم يكون إجمالى المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير؟

نشاط

الربط بالرياضة: يستعد «زياد» لسباق المسافات الطويلة فقرر أن يتدرب على الجرى مسافة ٤ كيلومترات فى اليوم الأول، ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر واحدًا يوميًّا.

(١) أوجد المسافة التى يقطعها «زياد» فى اليوم السابع.

(٢) أوجد مجموع المسافات التى يقطعها «زياد» فى الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).

(٣) إذا استمر زياد فى التدريب على هذا النمط دون انقطاع، فما عدد الأيام التى يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلومترًا؟

١ - ٤ المتتابعة الهندسية

Geometric sequence

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الهندسية
- التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية
- الحد النونى للمتتابعة الهندسية.
- تعيين المتتابعة الهندسية .
- الأوساط الهندسية
- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين

المصطلحات الأساسية

- متتابعة هندسية
 Geometric Sequence
- حد نونى *nth Term*
- متتابعة تزايدية
 Increasing Sequence
- متتابعة تناقصية
 Decreasing Seqence
- متتابعة متناوبة الإشارة
 Alternating signal Sequence
- وسط هندسى *Geometrical Mean*

الأدوات المستخدمة

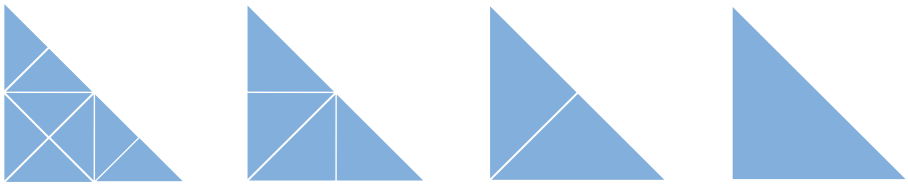
- آلة حاسبة علمية
 Scientific calculator
- برامج رسومية

نشاط

(١) ارسم على قطعة من الورق المقوى مثلثا متساوى الساقين وقائم الزاوية.

(٢) قص المثلث إلى مثلثين قائمى الزاوية وكل منهما متساوى الساقين .

(٣) كرر نفس العمل كما فى الشكل التالى وأوجد عدد المثلثات الناتجة فى كل مرة .



(٤) أجب عن الأسئلة الآتية :

أ هل عدد المثلثات الصغرى الناتجة فى الشكل تكون متتابعة حسابية ؟ فسر إجابتك.

ب هل توجد علاقة ما تربط أعداد المتتابعة الناتجة ؟ وما هذه العلاقة .

جـ هل بإمكانك إيجاد عدد المثلثات الناتجة من تكرار نفس النمط السابق فى الشكلين الخامس والسادس؟

نستنتج من النشاط السابق أن :

المتتابعة الناتجة من الأشكال السابقة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ،) وهى ليست متتابعة حسابية لأن $ع_{ر+١} - ع_{ر}$ ≠ مقدارا ثابتًا، ولكننا نلاحظ أنه إذا قسم أى حد من الحدود على الحد السابق له مباشرة يعطى مقدارًا ثابتًا (هو العدد ٢) وتسمى هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية .

تعريف

➢ تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية

إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = مقدار ثابت لكل ن ∈ صـ$_+$ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر).

مثال

(١) بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ الآتية هندسية، وأوجد أساس كل منها :

أ $ع_ن = ٢ \times ٣^ن$ ب $ع_ن = ٤ ن^٢$

جـ المتتابعة $(ع_ن)$ حيث : $ع_١ = ١٢$ ، $ع_ن = \frac{١}{٤} \times ع_{ن-١}$ (حيث ن > ١)

الحل

أ ∵ $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} = \frac{٢ \times ٣^{ن+١}}{٢ \times ٣^{ن}} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ (مقدار ثابت)

∴ المتتابعة هندسية وأساسها ر = ٣

ب ∵ $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} = \frac{٤(ن+١)^{٢}}{٤ن^{٢}}$ (ليس مقدارا ثابتًا) ∴ المتتابعة ليست هندسية

ج ∵ $(ع_{ن}) = (\frac{١}{٤} \times ع_{ن-١})$ (حيث ن > ١)

∴ $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-١}} = \frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(١) بين أيًّا من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها فى حال كونها هندسية :

أ $(ع_{ن})$ = (٣،٦،١٢،٢٤،٤٨،٩٦)

ب $(ع_{ن}) = (\frac{١}{٣}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٢٧}، \frac{١}{٨١}، \frac{١}{٢٤٣})$

ج $(ع_{ن})$ = (٥×٢^{ن})

د $(ع_{ن}) = (٣(ن+١)^{٢})$

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية : *Graphical representation of geometrical sequence*

مثال

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا .

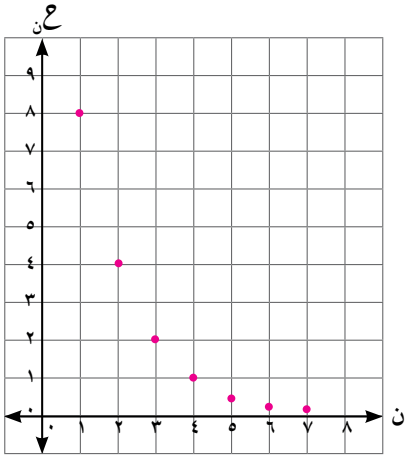
الحل

أساس المتتابعة = $\frac{١}{٢}$ ، وبالتالى الحدود الأربعة التالية هى:

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$

المجال هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

المدى هو {٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$}



ونلاحظ من الشكل البيانى أن:

- حدود المتتابعة متناقصة حيث أ > ٠ ، ٠ < ر < ١
- التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية.

تفكير ناقد :

هل يمكن أن يكون أساس المتتابعة الهندسية مساويًا للصفر أو مساويًا للواحد الصحيح ؟ فسر إجابتك .

حاول أن تحل

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

إيجاد الحد النونى للمتتابعة الهندسية: Finding the n^{th} term of a geometrical sequence

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الهندسية (ع$_ن$) التى حدها الأول أ وأساسها ر كالآتى:

ع$_١$ = أ ، ع$_٢$ = أ ر ، ع$_٣$ = أ ر^٢ ، ع$_٤$ = أ ر^٣

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو : ع$_ن$ = أ ر$^{ن-١}$

مثال

(٣) فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ،) أوجد:

أولًا: الحد الخامس . ثانيًا: رتبة الحد الذى قيمته ٥١٢.

الحل

∵ أ = ٢ ، ر = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، ع$_ن$ = أ × (٢)$^{ن-١}$

∴ ع$_٥$ = أ ر^٤ = ٢ × ٢^٤ = ٢ × ١٦ = ٣٢ أى أن قيمة الحد الخامس ٣٢

∵ ع$_ن$ = أ × ر$^{ن-١}$ ∴ ٢ × ٢$^{ن-١}$ = ٥١٢ وبقسمة الطرفين على ٢

∴ ٢$^{ن-١}$ = ٢^٨ ∴ ن – ١ = ٨ ∴ ن = ٩

أى أن الحد الذى قيمته ٥١٢ هو الحد التاسع

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن المتتابعة (ع$_ن$) حيث ع$_ن$ = ٢ × ٣$^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع.

تعيين المتتابعة الهندسية: *Identifying the geometrical sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول والأساس.

مثال

(٤) (ع$_ن$) متتابعة هندسية ، فإذا كان ع$_٤$ = ٤٠ ، ع$_٧$ = ٣٢٠ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

∵ ع$_٤$ = أ ر^٣ ∴ أ ر^٣ = ٤٠ (١)

∵ ع$_٧$ = أ ر^٦ ∴ أ ر^٦ = ٣٢٠ (٢)

وبقسمة طرفى المعادلتين (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{أ ر}^٦}{\text{أ ر}^٣} = \frac{٣٢٠}{٤٠}$ (حيث أ ر ≠ ٠) ∴ ر^٣ = ٨

ومنها ر = ٢

وبالتعويض فى المعادلة (١)

∴ أ (٢)^٣ = ٤٠ أى أن : ٨ أ = ٤٠

وبقسمة الطرفين على ٨ فإن أ = ٥ ∴ المتتابعة هى (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ،)

تعبير شفهى:

ماذا تتوقع إذا كانت قوة الأساس ر عددًا زوجيًّا؟ فسر إجابتك .

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة هندسية:

لكتابة المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ٥ ، ر = ٢ مثلًا نتبع الآتى:

نكتب قيمة أ (العدد ٥) ثم نضغط المفتاح [=] ثم نضغط على المفتاح [×] ثم نضع قيمة ر (العدد ٢) ثم نضغط المفتاح [=] فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على المفتاح [=] تعطى الحدود التالية وهكذا....

حاول أن تحل

٤ ($ع_ن$) متتابعة هندسية فيها $ع_٣$ = ١٢ ، $ع_٨$ = ٣٨٤ . أوجد هذه المتتابعة

٥ متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الثانى يساوى ٦ ، حدها العاشر يساوى ١٥٣٦ . أوجد المتتابعة.

مثال

الربط بالتعليم

٥ إذا كان معدل زيادة طلاب الصف الثانى الثانوى فى إحدى الإدارات التعليمية هو ٤ ٪ سنويًّا من السنة السابقة لها مباشرة، فإذا كان عدد الطلاب حاليًا ٢٤٠٠ طالب، فكم سيكون عددهم بعد ٦ سنوات؟

تذكر أن

$٤٪ = \frac{٤}{١٠٠} = ٠,٠٤$

الحل

∵ عدد الطلاب حاليًا = ٢٤٠٠

∴ عدد الطلاب فى السنة الثانية = ٢٤٠٠ + ٢٤٠٠ × ٤ ٪

= ٢٤٠٠ (١ + ٠,٠٤)

= ٢٤٠٠ (١,٠٤)

عدد الطلاب فى السنة الثالثة = ٢٤٠٠ (١,٠٤) + ٢٤٠٠(١,٠٤) × ٠,٠٤

= ٢٤٠٠ (١,٠٤) (١ + ٠,٠٤) = ٢٤٠٠(١,٠٤)^٢ وهكذا ...

أى أن أعداد الطلاب تُكون متتابعة هندسية (٢٤٠٠ ، ٢٤٠٠(١,٠٤) ، ٢٤٠٠(١,٠٤)^٢ ، ...)

أ = ٢٤٠٠ ، ر = ١,٠٤ ، ن = ٦

وبالتعويض فى قانون الحد النونى للمتتابعة الهندسية $ع_ن = أ \times ر^{ن-١}$

$ع_ن$ = (٢٤٠٠) × (١,٠٤)^٥ = ٢٩١٩,٩٦٦٩٦٦

أى أن عدد الطلاب بعد ٦ سنوات يساوى تقريبا ٢٩٢٠ طالبًا .

حاول أن تحل

الربط باللياقة البدنية:

٦ يمارس كمال رياضة المشى سيرًا على الأقدام؛ لتجديد لياقته البدنية و إنقاص وزنه الزائد ، فإذا قطع فى اليوم الأول مسافة ٥٠ مترًا، وكان يقطع فى كل يوم تالٍ ضعف المسافة التى يقطعها فى اليوم السابق مباشرة .

أ اكتب متتابعة المسافات التى يقطعها يوميًّا. ب أوجد المسافة التى يقطعها فى اليوم السابع.

الأوساط الهندسية : Geometric Means

الأوساط الهندسية كما فى الأوساط الحسابية هى الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين فى متتابعة هندسية و يستخدم أساس المتتابعة الهندسية؛ لإيجاد هذه الأوساط.

تعريف ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين أ ، جـ حيث : $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ أى أنه $ب^{٢} = أ جـ$

فتكون $ب = \pm \sqrt{أ جـ}$

أضف إلى معلوماتك

يعرف الوسط الهندسى فى الإحصاء لمجموعة من القيم الحقيقية الموجبة $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ ، ، $ع_{ن}$ بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم أى أن :

الوسط الهندسى (GM) = $\sqrt[ن]{ع_{١} ع_{٢} ع_{٣} ع_{ن}}$

إيجاد الأوساط الهندسية :

مثال

(٦) أدخل ٥ أوساط هندسية بين ٤ ، ٢٩١٦

الحل

أولًا : نوجد عدد حدود المتتابعة

يوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة الهندسية؛ لذا فإن عدد حدود المتتابعة

ن = ٢ + ٥ = ٧

ثانيًا : نوجد قيمة ر

الحد النونى للمتتابعة الحسابية : $ع_{ن} = أ ر^{ن-١}$

بالتعويض عن : أ = ٤ ، $ع_{ن}$ = ٢٩١٦ ، ن = ٧

$٢٩١٦ = ٤ \times ر^{٧-١}$ أى أن : $٤ \times ر^{٦} = ٢٩١٦$

بقسمة الطرفين على ٤ : $ر^{٦} = ٧٢٩$ أى أن : $ر^{٦} = (\pm ٣)^{٦}$ ومنها $ر = \pm ٣$

ثالثًا : نستخدم قيمة ر لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة:

٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢ ، ٢٩١٦ أو

×٣ ، ×٣ ، ×٣ ، ×٣ ، ×٣ ، ×٣

٤ ، -١٢ ، ٣٦ ، -١٠٨ ، ٣٢٤ ، -٩٧٢ ، ٢٩١٦

×-٣ ، ×-٣ ، ×-٣ ، ×-٣ ، ×-٣ ، ×-٣

الأوساط المطلوبة هى: ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢ أو -١٢ ، ٣٦ ، -١٠٨ ، ٣٢٤ ، -٩٧٢

حاول أن تحل ٩

(٧) أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

تفكير ناقد :

ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين حقيقيين موجبين متساويين؟

مثال

(٧) عددان موجبان وسطهما الحسابى يساوى ١٠ ، وسطهما الهندسى يساوى ٨ ، أوجد العددين .

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ص

تعريف الوسط الحسابى : $\frac{س + ص}{٢} = ١٠$

بضرب طرفى المعادلة فى ٢ : س + ص = ٢٠ ومنها : ص = ٢٠ – س (١)

تعريف الوسط الهندسى : $\sqrt{س ص} = ٨$

وبتربيع الطرفين : س ص = ٦٤ (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢): س(٢٠ – س) = ٦٤

بفك الأقواس والتبسيط : $س^{٢} - ٢٠ س + ٦٤ = ٠$

بتحليل المقدار الثلاثى : (س – ٤) (س – ١٦) = ٠

حل المعادلة التربيعية : س = ٤ أ، س = ١٦

بالتعويض لإيجاد قيمتى ص : ص = ١٦ أ، ص = ٤

أى أن العددان هما ٤ ، ١٦

حاول أن تحل

(٨) عددان موجبان وسطهما الحسابى يساوى ٢٥ ، وسطهما الهندسى يساوى ٢٠ ، أوجد العددين.

مثال

(٨) إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين، وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠، ومجموع الوسطين الثانى، والثالث يساوى ٦٠ فما هما العددان.

الحل

∵ عدد الأوساط = ٤ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦

∴ وبفرض أن العدد الأول = أ فيكون الوسطين الأول والرابع هما $ع_{٢}$ ، $ع_{٥}$

∴ $ع_{٢} + ع_{٥} = ٩٠$ ∴ $أ ر + أ ر^{٤} = ٩٠$

∴ $أ ر (١ + ر^{٣}) = ٩٠$ (١)

∵ الوسطين الثانى والثالث هما $ع_{٣}$، $ع_{٤}$

∴ $أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ٦٠$ ∴ $أ ر^{٢} (١ + ر) = ٦٠$ (٢)

بقسمة (١) ، (٢) $\frac{أ ر (١ + ر) (أ - ر + ر^{٢})}{أ ر^{٢} (١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ ر^{٢} - ٢ ر + ٢ = ٣ ر$ ∴ $٢ ر^{٢} - ٥ ر + ٢ = ٠$ ∴ $(ر - ٢)(٢ ر - ١) = ٠$

∴ $ر = ٢$ أ، $ر = \frac{١}{٢}$

بالتعويض عن ر = ٢ ∴ أ = ٥

وبالتعويض عن ر = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = ١٦٠ العددان هما ١٦٠ ، ٥

حاول أن تحل

(٩) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخريين هى ١ : ٢٧ فأوجد عدد تلك الأوساط.

تمـــاريـن ا – ٤

حدد المتتابعات الهندسية فيما يلى، ثم أوجد أساسها فى حال كونها هندسية:

(١) (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ،)

(٢) (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ،)

(٣) ($\frac{١}{١٢٨}$ ، $\frac{١}{٦٤}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ...)

(٤) $\left(\frac{١}{٣^{ن}}\right)$

(٥) (- ١ ، ٣ ، - ٩ ، ٢٧ ،)

(٦) (ن^{٢} – ١)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية إذا علم أن :

(٧) أ = ٢ ، ر = ٤

(٨) أ = -٤ ، ر = ٢

(٩) أ = ١ ، ر = $\frac{-١}{٢}$

(١٠) أ = -١٢٨ ، ر = $\frac{-١}{٢}$

أكمل ما يأتى

(١١) الحد السابع من المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ،) يساوى

(١٢) الحد السادس من المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ،) هو

(١٣) الحد الخامس من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٢ × (٣)$^{ن-١}$ يساوى

(١٤) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، - ٦ ، ١٢ ،) هو

(١٥) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو

(١٦) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص تساوى

(١٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٨) الحد الخامس فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ،) هو :

أ) $\frac{٢٧}{٨}$ ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ ج) $\frac{٩}{٤}$ د) $\frac{٨١}{٣٢}$

(١٩) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة :

أ) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ،)

ب) (-٢، ٤، -١٠، ١٦،)

ج) ($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

د) ($\frac{٣ب}{أ}$ ، ٦ ، $\frac{أ١٢}{ب}$ ، $\frac{أ^{٢}١٢٤}{ب^{٢}}$ ، ...) حيث أ > ٠ ، ب > ٠

(٢٠) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى :

أ) (ع$_{ن}$) = (٤ ن^{٢}) لكل ن ≥ ١

ب) (ع$_{ن}$) = ($\frac{١}{٤}$ × ع$_{ن-١}$) لكل ن ≥ ٢

ج $(ع_ن) = (٢^{ن} - ١)$ لكل ن $\geqslant ١$

(٢١) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن :

أ $أ جـ = ب^{٢}$ ب $أ جـ = ٢ ب$ ج $ب = \frac{أ + جـ}{٢}$ د $ب^{٢} = أ + جـ$

اكتشف الخطأ:

(٢٢) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التى تقع على استقامة واحدة.

(٢٣) تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ هندسية إذا كان $\frac{ع_ن}{ع_{ن+١}}$ يساوى مقدارًا ثابتًا يعرف بأساس المتتابعة (لكل ن $\geqslant ١$).

(٢٤) الأوساط الهندسية هى الحدود الواقعة بين حدين متتاليين من متتابعة هندسية، و يمكن إيجادها متى علم عدد الأوساط.

(٢٥) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٢٦) إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حيث $ع_ن = ٥ \times ٢^{ن}$. أثبت أنها متتابعة هندسية، ثم اكتب حدودها الثلاثة الأولى.

(٢٧) فى المتتابعة الهندسية $\left(\frac{١}{٨} ، -\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، -١ ، \right)$ أوجـــد :

أ حدها العاشر ب رتبة الحد الذى قيمته = - ١٠٢٤ .

(٢٨) بين أن المتتابعة $(ع_ن)$ هندسية حيث $ع_ن = \frac{٣}{٨} (٢)^{ن}$ ثم أوجد حدها الثامن ، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨.

(٢٩) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤ . أوجد هذه المتتابعة.

(٣٠) متتابعة هندسية حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨ . أوجد هذه المتتابعة.

(٣١) أوجد المتتابعة الهندسية $(ع_ن)$ التى فيها $ع_٣ = ١٢$ ، $ع_٨ = ٣٨٤$.

(٣٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثالث = ١٨ ، حدها السادس = ٤٨٦

(٣٣) أوجد المتتابعة الهندسية $(ع_ن)$ التى فيها $ع_٢ = ١٠$ ، $ع_٦ = ١٦٠$.

(٣٤) أوجد الوسط الهندسى بين ١٦ ، ٤٩

(٣٥) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣.

(٣٦) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب، يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ و يقل عن الآخر بمقدار ٣ .

(٣٧) أدخل أربعة أوساط هندسية بين ٢ ، ٦٤ .

(٣٨) أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{٨}{٢٧}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$

(٣٩) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٢ ، س هو ٨ فما قيمة س؟

(٤٠) عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسى ٣ ، فما العددان؟

(٤١) **الربط بالبيئة:** يصب الماء فى خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب فى اليوم الأول ١٢ لترًا

فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترًا؟

٤٢ **الربط بالسكان :** يزداد عدد السكان فى إحدى المدن بمعدل ثابت ٣ ٪ كل سنة . كم يكون عدد سكان هذه المدينة بعد ٥ سنوات، إذا علم أن عدد السكان الحالى هو ٦٠٠ ٠٠٠ نسمة؟

٤٣ **الربط بالتجارة :** سيارة ثمنها عند شرائها ١٢٠ ألف جنيه ، فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًّا بنسبة ١٢ ٪ من السنة السابقة لها مباشرة، فكم تكون قيمة السيارة بعد ٥ سنوات؟

٤٤ **الربط بالدخل:** موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه، ويحصل على علاوة سنوية بنسبة ٦ ٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة، كم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات؟

نشاط

الزيادة السكانية

إذا كان عدد السكان فى مدينة ما هو ٨٠٠٠٠ نسمة، وعلم أن معدل تزايد السكان هذه المدينة فى كل عام هو ٣ ٪ عن العام السابق له مباشرة .



أ أوجد عدد السكان بعد عام واحد.

ب أوجد عدد السكان بعد عامين.

جـ اكتب المتتابعة الهندسية الممثلة لسكان هذه المدينة .

د كم يكون عدد السكان فى نهاية العام العاشر ؟

هـ استخدم برنامج أكسيل (*Excel*) لتمثيل هذه البيانات فى نهاية خمسة أعوام .

و بالاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات، اكتب بحثًا عن الزيادة المطردة فى عدد السكان فى مصر، ومدى تأثيرها على الدخل القومى، والحلول المقترحة لمعالجة هذه المشكلة السكانية.

١ - ٥ المتسلسلات الهندسية

Geometric Series

سبق أن تعلمت أن المتسلسلة هى مجموع حدود متتابعة، وتعلمت كيفية إيجاد مجموعة المتسلسلة الحسابية ، والآن هل يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية التالية:
٩٥ + ٢٨٥ + ٨٥٥ + ... ١٨٦٩٨٨٥ لاحظ أنه من الصعوبة إيجاد مثل هذا المجموع بالطريقة التقليدية ، لذلك هناك حاجة إلى صيغة قانون لإيجاده بصورة سهلة وسريعة، وهذا ما سوف نتعرف عليه الآن.

مجموع المتسلسلة الهندسية : The sum of geometric series

المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية وضع بينها إشارة الجمع (+) ويرمز لمجموع حدًّا منها بالرمز جـ.

مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية

Sum of first n terms of an geometric sequence

أولًا : إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-١}$ متسلسلة هندسية حدها الأول أ ، أساسها ر فإنه يمكن إيجاد المجموع جـ$_{ن}$ لهذه المتسلسلة كما يلى :

جـ$_{ن}$ = أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-٢}$ + أر$^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر فإن :

رجـ$_{ن}$ = أر + أر^{٢} + أر^{٣} + ...+ أر$^{ن-١}$ + أر^{ن} (٢)

وبطرح المعادلتين يكون :

جـ$_{ن}$ - رجـ$_{ن}$ = أ – أر^{ن} أى أن :

جـ$_{ن}$ (١- ر) = أ(١– ر^{ن})

وبقسمة الطرفين على (١- ر) بشرط أن ١- ر ≠ ٠

$$جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} ، ر \neq ١$$

تفكير ناقد :

ما قيمة المجموع عندما ر = ١ ؟

مثال

(١) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التى فيها : أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

سوف تتعلم

- مجموع المتسلسلة الهندسية .
- استخدام رمز التجميع.
- المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى عدد نسبى.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة هندسية *Geometric Series*
- متسلسلة هندسية غير منتهية *Infinite Geometric Series*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*

الحل

مجموع المتتابعة الهندسية : جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

جـ$_{٨}$ = $\frac{٣(١ - ٢^{٨})}{٢ - ١}$ وبالتبسيط جـ$_{٨}$ = ٣ × ٢٥٥ = ٧٦٥

حاول أن تحل

(١) أوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين اللتين فيهما:

أ أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦

ب أ = ١٠٠٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

ثانيًا : إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن : جـ$_{ن}$ = $\frac{أ - أر^{ن}}{١ - ر}$ (١)

وأن : ل = أ $ر^{ن-١}$ وبضرب الطرفين فى ر فتكون لر = أ $ر^{ن}$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) فإن :

جـ$_{ن}$ = $\frac{أ - لر}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية: ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

الحل

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية : جـ$_{ن}$ = $\frac{أ - لر}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ١ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

جـ = $\frac{١ - ٦٥٦١ \times ٣}{٣ - ١}$ وبالتبسيط جـ = $\frac{١٩٦٨٢}{٢}$ = ٩٨٤١

حاول أن تحل

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها: أ = ٢٠٤٨ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ل = ٢٨

استخدام رمز التجميع

مثال

(٣) أوجد : $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣(٢)^{ر-١}$

الحل:

حيث أن المقدار داخل رمز المجموع على الصورة الأسية فهو يمثل متتابعة هندسية

ع$_{٥}$ = أ = $٣(٢)^{٥-١}$ = ٤٨ ، ر = ٢ ، ن = ١٢ − ٥ + ١ = ٨

مجموع المتسلسلة الهندسية : جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ٤٨ ، ر = ٢ ، ن = ٨

جـ$_{٨}$ = $\frac{٤٨ (١ - ٢^{٨})}{٢ - ١}$ وبالتبسيط جـ$_{٨}$ = ٤٨ × ٢٥٥ = ١٢٢٤٠

فكر:

هل يمكنك إيجاد المجموع فى المثال السابق بمعلومية أ ، ل ، ر ؟ فسر إجابتك.

حاول أن تحل

(٣) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين :

أ $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{ر-١٠}$ ب $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦(\frac{١}{٢})^{ر-١٠}$

مثال **تكوين المتتابعة الهندسية:** *Forming the geometric sequence*

(٤) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤.

الحل

∵ أ = ٢٤٣ ، ل = ١ ، جـن = ٣٦٤ ، جـن = $\frac{أ - ل ر}{ر - ١}$

∴ $\frac{ر - ٢٤٣}{ر - ١}$ = ٣٦٤ ∴ ٣٦٤ (ر – ١) = ر – ٢٤٣

∴ ٣٦٤ – ٣٦٤ ر = ر – ٢٤٣ ∴ ٣٦٤ ر – ر = ٣٦٤ – ٢٤٣

∴ ٣٦٣ ر = ١٢١ وبقسمة الطرفين على ٣٦٣ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

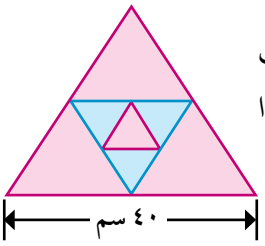
المتتابعة الهندسية هى (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ،)

حاول أن تحل

(٤) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ٢٤٣ وحدها الأخير ١، مجموع حدودها ٣٦٤ .

مثال **الربط بالهندسة:**

(٥) يبين الشكل المقابل مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه الخارجى يساوى ضعف طول ضلع المثلث الداخلى الذى تنصف رؤوسه أضلاع هذا المثلث ، فإذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فأوجد مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط.



الحل

محيط المثلث الأكبر = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

محيط المثلث الأصغر التالى = ٣ × ٢٠ = ٦٠

محيط المثلث التالى للمثلث الأصغر = ٣ × ١٠ = ٣٠

أى أن النمط هو : ١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، إلى ١٠ حدود

مجموع المحيطات = ١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + ... وهى مجموع متسلسلة هندسية

مجموع المتسلسلة الهندسية : جـن = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ١٢٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

وبالتبسيط واستخدام الآلة الحاسبة جـ١٠ = $\frac{١٢٠ (١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ٢٣٩ $\frac{٤٩}{٦٤}$

تذكر أن

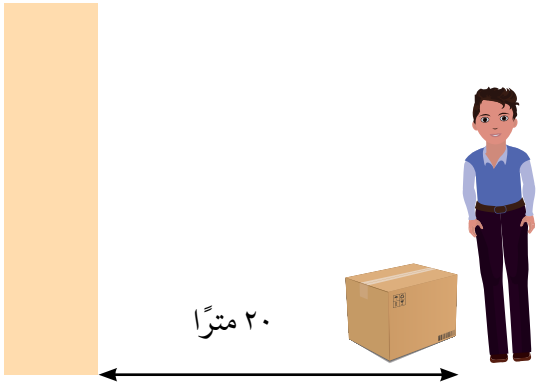
محيط المثلث المتساوى الأضلاع = ٣ × طول ضلعه

٩ حاول أن تحل

٥ **الربط بالأحياء:** إذا تضاعفت زراعة البكتريا كل يوم (فى إحدى عينات البحوث الطبية) ، فكم يكون عدد البكتريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها فى اليوم الأول ٨٠٠ .

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية Infinite geometric series

فكر و ناقش



أراد زياد نقل صندوق فى اتجاه حائط يبعد عنه مسافة ٢٠ متر على عدة مراحل بحيث تبلغ المسافة التى ينقل اليها الصندوق تساوى نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة فهل يستطيع زياد أن يصل إلى الحائط؟

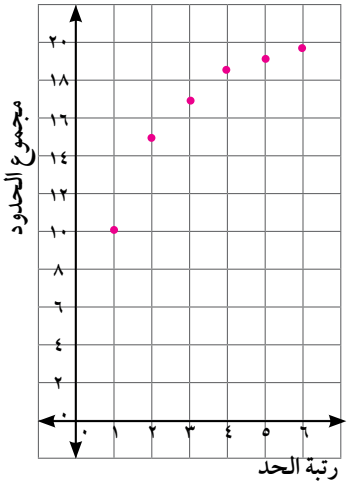
يمكنك الإجابة على ذلك من خلال دراستك المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

تعريف ٢

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لانهائى من الحدود ، وإذا كان مجموعها عددًا حقيقيًّا فإنها تكون متقاربة؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقى، أما إن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة.

فى بند فكر وناقش مجموع المسافات التى يقطعها زياد تعطى بالمتسلسلة:

١٠ + ٥ + ٢,٥ + ١,٢٥ + ... وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من ٢٠ مترًا، وهو المجموع الفعلي لها، وبالتالى يمكن اعتبار أن زياد يصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدود المتتابعة إلى ما لانهاية، والشكل الموضح يبين التمثيل البيانى للمجموع $ح_ن$ لذلك فإن المتسلسلة التقاربية يقترب المجموع من عدد حقيقى حيث $|ر| < ١$ وتكون غير تقاربية إذا لم يقترب المجموع من عدد حقيقى حيث $|ر| \geq ١$



مثال المتسلسلات التقاربية وغير التقاربية

٦ أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها ؟ فسر إجابتك.

أ ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...

ب ٢٤ + ٣٦ + ٥٤ + ...

الحل

أ نوجد أساس المتسلسلة الهندسية ر = $\frac{٤٥}{٧٥} = \frac{٣}{٥}$ فالمتسلسلة يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

لأن : $-١ < \frac{٣}{٥} < ١$

ب نوجد أساس المتسلسلة الهندسية ر = $\frac{٣٦}{٢٤} = \frac{٣}{٢}$ فالمتسلسلة لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها
لأن : $\frac{٣}{٢} > ١$

حاول أن تحل

٦ أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها؟ فسر إجابتك

أ ٧ + ٢١ + ٦٣ + ... ب $\frac{٨١}{٨} + \frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} +$

مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

The sum of the infinite geometric series

علمنا أن مجموع ن حدا من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن ر^{ن} يقترب من الصفر عندما تكون - ١ < ر < ١

ويصبح المجموع : جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$

تفكير ناقد :

هل يمكنك إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية عندما |ر| ⩽ ١ ؟ فسر أجابتك .

تعبير شفهى :

هل يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية فى بند (فكر وناقش) ؟ فسر إجابتك.

مثال

٧ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد :

أ $\frac{٨١}{٨} + \frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} +$ ب $\frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٦} + \frac{٢٥}{٢٤} +$

الحل

أ نوجد أساس المتتابعة الهندسية : ر = $\frac{٢٧}{٤} \div \frac{٨١}{٨} = \frac{٢٧}{٤} \times \frac{٨}{٨١} = \frac{٢}{٣}$

∵ - ١ < $\frac{٢}{٣}$ < ١ ∴ يوجد للمتسلسلة مجموع

∵ أ = $\frac{٨١}{٨}$ ، ر = $\frac{٢}{٣}$ وبالتعويض فى صيغة المجموع جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$

∴ جـ$_{\infty}$ = $\frac{\frac{٨١}{٨}}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٨١}{٨}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٤٣}{٨}$

ب نوجد أساس المتتابعة الهندسية : ر = $\frac{٥}{٦} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٦} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٤}$

∵ $\frac{٥}{٤}$ > ١ ∴ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد :

أ ١٢ – ٢٤ + ٤٨ – ٩٦ ب $\frac{٧}{٥} + \frac{٢١}{١٠} + \frac{٦٣}{٢٠} +$

مثال

استخدام رمز التجميع *Use the summation notation*

(٨) أوجد $\sum_{ن=١}^{\infty} ٤٢(\frac{٦}{٧})^{ن-١}$

الحل

مجموع المتتابعة الهندسية : $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

بالتعويض عن : $أ = ٤٢$ ، $ر = \frac{٦}{٧}$: $جـ_{\infty} = \frac{٤٢}{\frac{٦}{٧} - ١} = ٢٩٤$

حاول أن تحل

(٨) أوجد : $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥٦(\frac{٣}{٤})^{ن-١}$

تطبيقات على المتتابعات

يمكن استخدام المتتابعات فى دراسة بعض المشكلات الحياتية التى تتعلق بالإنسان من حيث مصادر الدخل والتغيرات التى تحدث له من تكاثر، ووفاة، وهجرة، والأمثلة التالية توضح ذلك .

مثال

(٩) الربط بالدخل: يمثل الجدول التالى الدخل الشهرى لأحد العمال فى نهاية خمسة أعوام متتالية مقدرًا بالجنيه المصرى، علما بأن هذا الدخل يخضع لمتتابعة هندسية .

العام	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس
الدخل الشهرى بالجنيه	٢٨٨	٤٣٢	٦٤٨		

أ أوجد أساس المتتابعة الهندسية .

ب أوجد الدخل الشهرى لهذا العامل خلال كل من العامين الرابع والخامس .

جـ أوجد بالجنيه المصرى جملة ما يستحقه هذا العامل خلال هذه المدة .

د أوجد المتوسط الشهرى لدخل هذا العامل خلال تلك المدة .

الحل

أ ∵ المتتابعة هندسية ∴ الأساس $(ر) = \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}} = \frac{٤٣٢}{٢٨٨} = \frac{٣}{٢}$

ب الدخل الشهرى خلال العام الرابع $= ع_{٣} \times ر = ٦٤٨ \times \frac{٣}{٢} = ٩٦٢$ جنيها ،

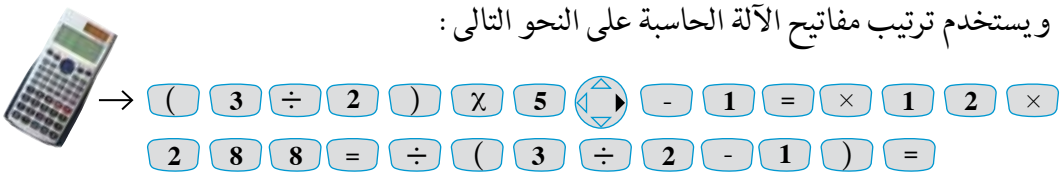
الدخل الشهرى خلال العام الخامس $= ع_{٤} \times ر = ٩٦٢ \times \frac{٣}{٢} = ١٤٥٨$ جنيه

جـ جملة ما يستحقه العامل $= ١٢ (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + ...)$ إلى ٥ حدود

∵ $جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ ∴ $جـ_{ن} = \frac{٢٨٨ \times ١٢ [١ - (\frac{٣}{٢})^{٥}]}{\frac{٣}{٢} - ١}$

$= ٤٥٥٧٦$ جنيه

ويستخدم ترتيب مفاتيح الآلة الحاسبة على النحو التالى :



د المتوسط الشهرى لدخل العامل = جملة الدخل / عدد الشهور = ٤٥٥٧٦ / ١٢ × ٥ = ٧٥٩,٦ جنيه

تفكير ناقد :

هل يمكنك إيجاد المتوسط الشهرى لدخل العامل، وذلك بقسمة (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + ... إلى ٥ حدود) على ٥ سنوات؟ فسر إجابتك .

٩ حاول أن تحل

الربط بالفيزياء : تم دحرجة كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى، فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترًا ثم بدأت تقطع ٦٠ ٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة . أوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف .

تمـارين ١ - ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ١ ، ر = ٢ يساوى :

أ ٣٢ ب ٣١ ج ٣٠ د ٢٩

٢ مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة (٤ ، ٢ ، ١ ،) هو :

أ ٨ ب ١٢ ج ١٦ د ٢٠

٣ إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود متتابعة هندسية أساسها ١/٤ هو ٤ فإن حدها الأول يساوى :

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

٤ إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى :

أ ١/٣ ب ١/٢ ج ٧/٨ د ٣/٤

٥ متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى :

أ ٠,٥ ب ٠,٣٣٣ ج ٠,٢٥ د ٠,٦٦٦

اكتشف الخطأ:

٦ يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية عندما تكون |ر| ≥ -١

٧ مجموع ن حدا الأولى من حدود متتابعة هندسية فيها |ر| > ١ أكبر من مجموع عدد غير منته من حدودها .

٨ مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ،) أكبر من ضعف حدها الأول .

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٩) أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

أ (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، إلى ٦ حدود)

ب (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، إلى ٦ حدود)

جـ (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ، ٧٦٨)

(١٠) أى من المتتابعات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن :

أ (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...)

ب (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...)

جـ $(\frac{1}{32}، \frac{1}{16}، \frac{1}{8}$...)

د $(٢ \times ٥^{-١ - ن})$

(١١) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

أ (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ،)

ب $(\frac{81}{16}، \frac{27}{8}، \frac{9}{4}$)

جـ (٢ ، $\sqrt{2}$ ، ١ ،)

د $(\frac{27}{4}، \frac{27}{16}، \frac{27}{64}$)

د $(ع_ن) = (٣^{-٣ - ن})$

هـ $(ع_ن) = (\frac{2}{3})^{ن-١}$

(١٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤

(١٣) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣

(١٤) أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية $(ع_ن) = (٣^{ن-١})$ ابتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر.

(١٥) فى المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ،) أوجد أقل عدد من الحدود التى يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود أكبر من ١٠٠٠

(١٦) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع عدد غير منته من حدودها يساوى ٤٨ ،حدهـا الثانى يساوى ١٢.

(١٧) كم حدا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ،) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١.

(١٨) أثبت أن المتتابعة $(ع_ن) = (١٠ \times ٢^{ن-٢})$ هى متتابعة هندسية وأوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ٢٥٥٥ .

(١٩) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_٢ = ٦$ ، $ع_٣ - ع_١ = ٩$. أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حداً الأولى منها .

(٢٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها = ٤٥ ، حدها السادس يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٩٠ . أوجد هذه المتتابعة .

(٢١) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منتهية = ١٨ ،الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$. فما مجموعها؟

(٢٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، مجموع عدد لانهائى من حدودها = ٢٥

(٢٣) متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة .

(٢٤) متتابعة هندسية غير منتهية ، وأى حد فيها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، إذا كان حدها الرابع = ٣ . أوجد هذه المتتابعة.

(٢٥) **الربط بالدخل :** بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٠,٦ ٪ من مرتب السنة السابقة . احسب مرتبه فى السنة السابعة، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى .

(٢٦) **الربط بالدخل :** بدأ موظف براتب سنوى ٣٦٠٠ جنيه ويتزايد هذا المرتب كل سنة بمعدل $\frac{١}{٢٠}$ عما كان عليه فى السنة السابقة ، فكم يصبح مرتبه بعد ١١ سنة ، وما مجموع المبالغ التى يتقاضاها خلال هذه المدة ؟

(٢٧) **الربط بالادخار:** استطاع كريم أن يوفر ١٥٠ جنيهًا فى السنة عندما كان عمره ٦ سنوات ، وكان فى كل سنة تالية يوفر ضعف ما يوفره فى السنة السابقة فإذا كان عمر كريم الآن ١٠ سنوات، وأراد شراء حاسب آلى بمبلغ ٥٠٠٠ جنيه، فهل مجموع ما وفره كريم خلال هذه المدة يكفى لشراء الحاسب ؟ فسر إجابتك .

(٢٨) **تفكير ابداعى :** إذا كونت أ ، ب ، جـ متتابعة هندسية فأثبت أن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

(٢٩) **الربط بالرياضة:** سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ٣٦ مترًا، وفى كل مرة تصطدم بالأرض ترتفع $\frac{٣}{٤}$ المسافة التى سقطت منها . أوجد :

أ المسافة التى سقطت منها الكرة عندما اصطدمت بالأرض للمرة السادسة .

ب مجموع المسافات التى تكون الكرة قد قطعتها منذ لحظة سقوطها حتى اللحظة التى اصطدمت فيها بالأرض للمرة السادسة .

جـ مجموع المسافات التى تكون الكرة قد قطعتها منذ لحظة سقوطها؛ حتى تسكن.

ملخص الوحدة

المتتابعة: هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صـ+ أو مجموعة جزئية منها ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ح مع ملاحظة الآتى :

- حدود المتتابعة هى صور عناصر مجالها .
- الرمز (ع$_{ن}$) يعبر عن المتتابعة بينما الرمز ع$_{ن}$ يعبر عن حدها النونى .
- تخضع المتتابعة لترتيب عناصرها و يمكن حصر هذه العناصر .
- تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيا وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته.
- تمثل المتتابعة بيانيًّا على أنها دالة وذلك من خلال تمثيل الأزواج المرتبة بنقاط منفصلة فى المستوى الإحداثى .

المتسلسلة: هى عملية جمع حدود المتتابعة ، و يستخدم رمز التجميع " Σ " لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة .

- **المتسلسلة المنتهية :** تحتوى على عدد محدود من العناصر وتكتب بالصورة $\sum_{ر=1}^{ن} (ع_ر)$
- **المتسلسلة غير المنتهية :** لا يمكن حصر عدد حدودها وتكتب بالصورة $\sum_{ر=1}^{\infty} (ع_ر)$

المتتابعة الحسابية: هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدرًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة، و يرمز له عادة بالرمز (ء) حيث ء = ع$_{ن+1}$ – ع$_{ن}$ لكل ن ∈ صـ+ .

- يمكن تكوين المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ء) .
- العلاقة بين ن ، ع$_{ن}$ هى ع$_{ن}$ = ءن + ب حيث ء ، ب ثابتان ، ء أساس المتتابعة وهذه علاقة خطية تمثل بيانيا بمجموعة من النقاط .
- تكون المتتابعة تزايدية إذا كان ء > ٠ ، وتكون تناقصية إذا كانت ء < ٠
- الحد النونى للمتتابعة الحسابية (ع$_{ن}$) التى حدها الأول ا وأساسها ء يعطى بالعلاقة : ع$_{ن}$ = أ + (ن – ١) ء
- ولإيجاد الحد الأخير (ل) له يكون: ل = أ + (ن - ١) ء
- إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن ب تعرف بالوسط الحسابى بين العددين أ ، جـ حيث ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$
- يمكن إدخال عدة أوساط حسابية بين عددين ، و يكون عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط +٢
- مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة حسابية :

أولًا : بمعلومية حدها الأول والأساس : جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن - ١) ء]

ثانيًا : بمعلومية حدها الأول والأخير : جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ+ل)

المتتابعة الهندسية: تسمى المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ ≠ ٠ متتابعة هندسية إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = مقدار ثابت لكل ن ∈ص+ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر)

- تمثيل المتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية من خلال أزواج مرتبة بنقاط منفصلة فى المستوى الإحداثى.
- الحد النونى للمتتابعة الهندسية (ع$_{ن}$) التى حدها الأول أ وأساسها ر يعطى بالعلاقة ع$_{ن}$ = أ×ر$^{ن-١}$
- إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين أ ، جـ حيث ب = ±$\sqrt{}$أ جـ ٠
- مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية :

أولًا : بمعلومية حدها الأول والأساس : جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١-ر^{ن})}{١-ر}$ ، ر ≠ ١

ثانيًا : بمعلومية حدها الأول والأخير : جـ$_{ن}$ = $\frac{أ-ل ر}{١-ر}$ ، ر ≠ ١

- **المتسلسلة الهندسية غير المنتهية :** لها عدد لانهائى من الحدود .
- مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية : جـ$_{∞}$ = $\frac{أ}{١-ر}$ ، ر ≠ ١ حيث |ر| < ١

تمـارين عـامة

أكمل مايأتى:

(١) فى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_{ن+١} = ن$ $ع_ن$ إذا كان $ع_١ = ١$ فإن $ع_٢ =$

(٢) المتسلسلة $٥ \times ١ + ٥ \times ٢ + ٥ \times ٣ + ... + ٥ \times ١٠$ تكتب باستخدام رمز المجموع بالصورة

(٣) أكتب الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) هو

(٤) الوسط الهندسى للعددين ٨ ، ١٨ هو

(٥) إذا كان الوسط الحسابى للعددين ا ، ٢١ هو ١٤ فإن ا تساوى

(٦) عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ٩٩ والتى يقبل كل منها القسمة على ٥ تساوى

(٧) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٠} (٢ر - ٣)$ يساوى

(٨) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥} (٢)^{ر-١}$ يساوى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٩) تسمى المتتابعة التى قاعدتها : $ع_ن = ٤ن + ١$ بأنها متتابعة:

أ تزايدية　　ب تناقصية　　ج ليست تزايديه ولا تناقصية　　د ثابتة

(١٠) تكتب المتسلسلة الحسابية : ٣ + ٧ + ١١ + ٣٥ باستخدام رمز المجموع كالآتى :

أ $\sum_{ر=١}^{٨} (٤ر - ١)$　　ب $\sum_{ر=١}^{٩} (٤ر - ١)$　　ج $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر - ٤)$　　د $\sum_{ر=١}^{٨} (٣ر - ٤)$

(١١) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة :

أ (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ...)　　ب (- ٢٣ ، - ٢٨ ، - ٣٣ ، ...)

ج $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ،)$　　د $(\frac{٣٢}{٥} ، \frac{٢٦}{٥} ، \frac{٢٠}{٥} ، ...)$

(١٢) إذا كان ٢ أ + ٢ ، ٦ أ - ٢ ، ٧ أ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى :

أ ١　　ب ٢　　ج ٣　　د ٤

(١٣) مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨} (٢ر + ١)$ يساوى :

أ ٦٤　　ب ٧٢　　ج ٧٦　　د ٨٠

(١٤) متتابعة هندسية مجموع ن حدا الأولى منها يعطى بالعلاقة $جـ_ن = ٣^ن - ١$ فإن الحد الخامس منها يساوى:

أ ١٦٢　　ب ٢٤٣　　ج ٨١　　د ٧٢٩

(١٥) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ٤٨ هو ٧٢ فإن أساسها يساوى:

أ $\frac{١}{٤}$　　ب $\frac{١}{٣}$　　ج $\frac{١}{٢}$　　د $\frac{٣}{٤}$

أجب عن الأسئلة الآتية

(١٦) اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعتين المعرفتين كالآتى :

أ $ع_{ن+١} = ن + ع_ن$ ، $ع_١ = ٣$ لكل $ن \geq ١$

ب $ع_١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٥$ ، $ع_{ن+٢} = ع_{ن+١} + ع_ن$ لكل $ن \geq ١$

(١٧) إذا كان مجموع الحدين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ٢ وكان مجموع الحدود السادس والسابع والثامن يساوى – ٤٥ فأوجد المتتابعة.

(١٨) ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها يساوى = ١٢ ، وحاصل ضربهما = ٤٨ أوجد هذه الأعداد.

(١٩) ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها يساوى ٢٧ ، ومربع حدها الثانى يزيد عن حاصل ضرب الحدين الأول والثالث بمقدار ١٦، أوجد هذه الأعداد.

(٢٠) إذا أدخل عدة أوساط حسابية بين ٣ ، ٥٣ وكانت نسبة مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين كنسبة ٣ : ١٣ فأوجد هذه الأوساط .

(٢١) فى المتتابعة الحسابية (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...). أوجد:

أ مجموع ١٥ حداً الأولى منها.

ب مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر

ج عدد الحدود التى مجموعها = ٧٥٠ ابتداء من الحد الأول.

(٢٢) فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...) أوجد أقل عدد من الحدود التى يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود أكبر من ٦٥٠٠

(٢٣) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية حدوده موجبة فيها $ع_٦ = \frac{١}{٩} ع_٤$ ، $ع_٣ + ع_٦ = ٢٨$
أوجد المتتابعة ، ثم اوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

(٢٤) متتابعة هندسية حدودها موجبة مجموع الأربعة حدود الأولى منها = ٦٠ ، مجموع الأربعة حدود التالية لها = ٩٦٠ أوجد هذه المتتابعة ، ثم أوجد مجموع سبعة حدود من حدودها ابتداء من حدها الثالث.

(٢٥) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٨١ ، حدها السادس يساوى $\frac{١}{٣}$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الثالث.

(٢٦) الربط بالأجور: يتقاضى عامل راتبًا شهريًّا قدرة ١٢٠٠ جنيه فى العام الأول، ثم يزداد أجره بمعدل ١٠ ٪ سنويًّا. اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع ما يتحصل عليه العامل من أجر خلال خمس سنوات ، ثم أوجد هذا المجموع.

اختبار تراكمي

مقارنات: بين أوجه الشبه والخلاف بين كل من:

(١) المتتابعات والمتسلسلات.

(٢) الحد النونى للمتتابعة الحسابية، والحد النونى للمتتابعة الهندسية.

(٣) مجموع المتسلسلة الحسابية، ومجموع المتسلسلة الهندسية.

أسئلة ذات إجابات قصيرة :

(٤) أوجد قيمة الحد الأول (ا) فى كل من:

أ المتتابعة الحسابية التى فيها : ن = ٣ ، $ع_{٧}$ = ٣٢

ب المتتابعة الهندسية التى فيها : $م = \frac{١}{٢}$ ، $ع_{٤} = \frac{١}{١٦}$

جـ المتسلسلة الحسابية التى فيها: ن =٦ ، $جـ_{١٢}$ الأولى =٢١٦

د المتسلسلة الهندسية التى فيها : م =٢ ، $جـ_{٨}$ الأولى =٢٥٥

أسئلة ذات إجابات متعددة:

(٥) اكتب ثلاث متتابعات بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة ليست حسابية أو هندسية وتبدأ كل منها كالاتى: ٢ ، ٦ ، ...

(٦) اكتب ثلاث متتابعات هندسية الحد الأول لكل منها ١٦ بحيث تكون الأولى تزايدية والثانية تناقصية والثالثة ثابتة ، ثم أوجد مجموع إحدى هذه المتتابعات إلى مالانهاية.

(٧) اكتب المتسلسلة الهندسية ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ... بطريقتين مختلفتين باستخدام رمز المجموع.

(٨) تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموع، ومتى لا يكون لها مجموع ؟ وضح تبريرك.

تطبيقات حياتية:

(٩) قرض: اقترض تاجر مبلغًا من المال، واتفق على أن يقوم بسداده على النحو التالى ، القسط الأول ٥٠٠٠ جنيه، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط الأول بمقدار ٥٠٠ جنيه ، فإذا كان عدد الأقساط ١٠ فما قيمة القرض؟

(١٠) دخل: إذا كان الدخل السنوى لإحدى المؤسسات ٨٤٠٠٠٠ جنيه، ويزداد سنويًا بمقدار ٤٨٠٠٠ جنيه، فبعد كم سنة يصبح دخلها ١٤٦٤٠٠٠ جنيه.

(١١) تجارة: اشترى رجل جهازا كهربائيًا ودفع من ثمنه مقدمًا ٨٠٠ جنيه، واتفق مع البائع على سداد باقى المبلغ على أقساط شهرية لمدة عامين يبدأ القسط الأول بمبلغ ١٠٠ جنيه، ويزداد كل قسط بعد ذلك بمبلغ ١٠ جنيهات . أوجد المبلغ الكلى الذى سيدفعه الرجل ثمنًا للجهاز.

أسئلة ذات إجابات طويلة:

(١٢) إذا كونت (١٥ ، (٣ ك + ٢) ، (٤ ك – ٥) ،) متتابعة حسابية فأوجد قيمة ك .

(١٣) أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٠ ، حدها السابع يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع.

(١٤) متتابعة حسابية حدها العشرين يساوى ٤١ ، يزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة . أوجد هذه المتتابعة.

(١٥) (ع$_ن$) متتابعة هندسية فيها ع$_٢$ = ٥ ، $\frac{ع_٧}{ع_٤} = \frac{١}{٢٧}$ ، أوجد هذه المتتابعة.

(١٦) متتابعة حسابية فيها ع$_{١٢}$ = ٣٨ ، ع$_{٣٥}$ = ٢٤٥ . أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى منها.

(١٧) متتابعة حسابية فيها مجموع الحدين التاسع عشر والعشرين يساوى ١٤٤ ، مجموع الحدين العشرين والحادى والعشرين يساوى ١٥٢ أوجد:

أ الحد العشرين.

ب عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول؛ ليكون المجموع ٧٢٠

الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق
Permutations, combinations



مقدمة الوحدة

العد من المهارات الأساسية فى الرياضيات ، فكثيرًا ما تواجهنا مسائل نحتاج فى حلها إلى إجراء عمليات عد بطرق مختلفة ، ومن خلال هذه الوحدة سوف نتعرف على إستراتيجيات مختلفة للعد، ومنها مبدأ العد الأساسى، ومن أهم تطبيقاته:

التباديل التى تستخدم فى معرفة عدد الطرق التى يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة.

التوافيق: وهى الاختيار دون مراعاة الترتيب.

ولقد كان للعلماء العظام عمر الخيام وإسحاق نيوتن، وبسكال الدور الأكبر فى هذا المجال الذى مازال ساريًا حتى اليوم.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق والعلاقة بينها.
- يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*
- مبدأ العد المشروط *Conditional Principle of Counting*
- عملية *Operation*
- شجرة بيانية *Tree Diagram*
- مضروب *Factorial*
- تباديل *Permutations*
- توافيق *Combinations*
- عناصر *Elements*
- ترتيب *Order*
- لجنة *Committee*
- مجموعة جزئية *Subset*

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية *Scientific Calculator*
- برامج رسومية للحاسوب *Graphical Computer Programs*

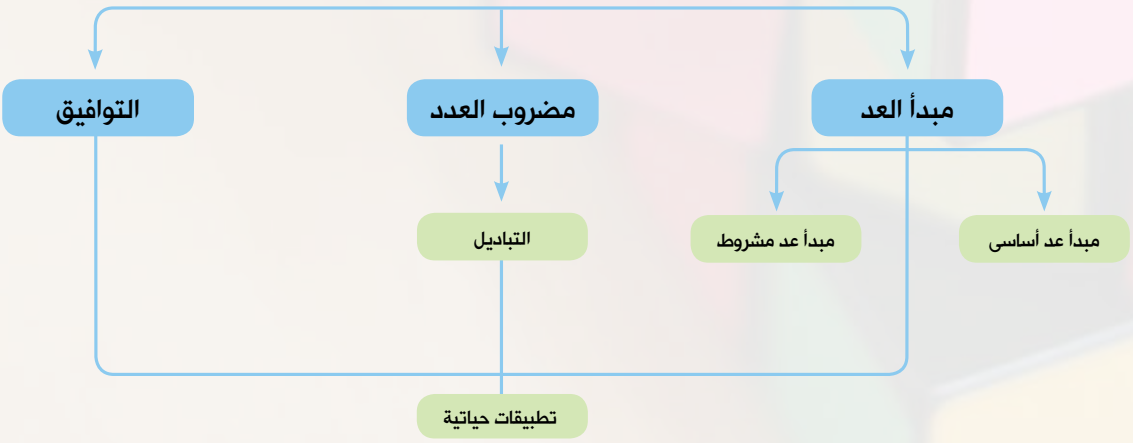
دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): مبدأ العد .

الدرس (٢ - ٢): مضروب العدد - التباديل.

الدرس (٢ - ٣): التوافيق.

مخطط تنظيمى للوحدة



٢ - ١ مبدأ العد

Fundamental Principle of Counting

سوف تتعلم

- مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- مبدأ العد الأساسى.
- مبدأ العد المشروط.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى
 Fundamental Counting Principle
- عملية — *Operation*
- شجرة بيانية — *Tree Diagram*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
 Scientific Calculator
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

فكر و ناقش

إذا طلب منك ارتداء قميص وبنطلون من بين ٢ قميص و٣ بنطلون.
فكم عدد طرق الاختيار؟



مثال

(١) كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (أشرف - محمد - حسن) وطالبة من بين طالبتين (سمر - منى).

الحل

فى هذا المثال نجد من السهل معرفة عدد طرق الاختيار فمثلًا يمكننا اختيار أشرف ، سمر أو أشرف ، منى أو محمد ، منى أو حسن ، سمر... إلخ وسوف نعبر عن ذلك بالمخطط البيانى التالى، ويسمى بمخطط الشجرة البيانية.

الطلاب	الطالبات	الاختيار
أشرف	سمر	أشرف ، سمر
	منى	أشرف ، منى
محمد	سمر	محمد ، سمر
	منى	محمد ، منى
حسن	سمر	حسن ، سمر
	منى	حسن ، منى

عدد طرق اختيار طالب من ثلاثة طلاب = ٣ طرق
عدد طرق اختيار طالبة من طالبتان = ٢ طريقة
∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

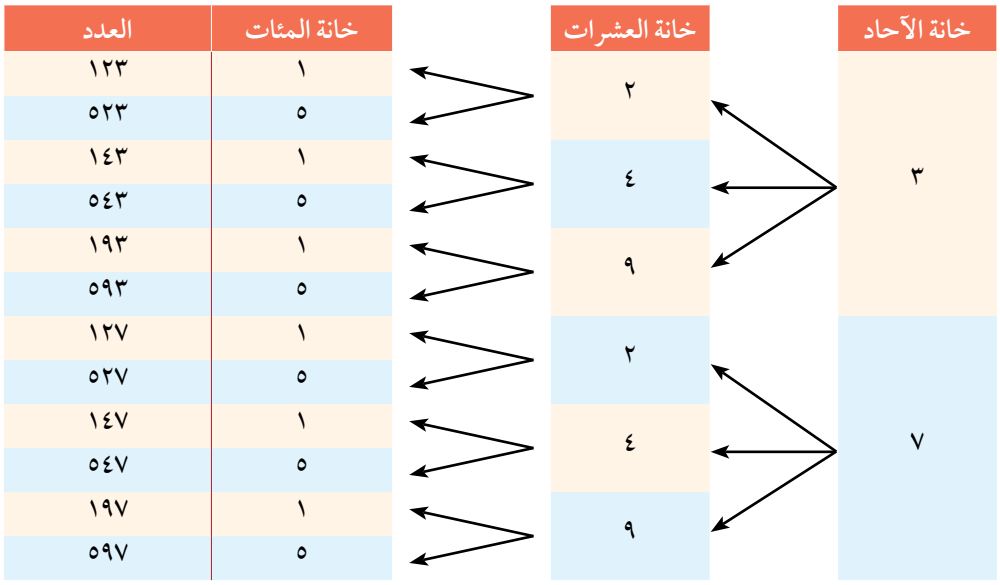
حاول أن تحل

(١) فى بند فكر وناقش كم عدد طرق الاختيار الممكنة؟

مثال

(٢) كم عدد مكون من ثلاثة أرقام، بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢، ٤، ٩} ورقم المئات من العناصر {١، ٥}؟

الحل



خانة الآحاد	خانة العشرات	خانة المئات	العدد
٣	٢	١	١٢٣
		٥	٥٢٣
	٤	١	١٤٣
		٥	٥٤٣
	٩	١	١٩٣
		٥	٥٩٣
٧	٢	١	١٢٧
		٥	٥٢٧
	٤	١	١٤٧
		٥	٥٤٧
	٩	١	١٩٧
		٥	٥٩٧

من الشجرة البيانية نجد أن:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد × عدد طرق اختيار رقم العشرات × عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة

الأمثلة السابقة توضح التعريف الآتي:

تعلم

مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*

تعريف: إذا كان عدد طرق إجراء عمل مايساوى $م_{١}$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_{٢}$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_{٣}$ طريقة وهكذا.... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_{١} \times م_{٢} \times م_{٣} \times \times م_{ن}$

مثال

(٣) كم عدد الاختيارات التى يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروبًا واحدًا من المشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو).

الحل

عدد طرق اختيار الوجبة = ٣ طرق ، عدد طرق اختيار المشروب = ٣ طرق

عدد طرق الاختيار = ٣ × ٣ = ٩ طرق.

حاول أن تحل

(٢) مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطات ، ٣ أنواع من المشروبات. كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميًّا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلاطات والمشروبات؟

مثال

(مبدأ عد مشروط) *Conditional Principle of Counting*

(٤) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

الحل

نبدأ بخانة المئات المشروطة (لايمكن استخدام الصفر جهة اليسار)

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٣

∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٤

حاول أن تحل

(٣) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧}، بحيث يكون رقم العشرات زوجيًّا.

تمـارين ٢ – ٢

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى:

أ) ١ ب) ٤ + ٤ ج) ٤ × ٤ د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام { ٥، ٣، ٠، ٢} يساوى:

أ) ٣ × ٢ ب) ٤ × ٢ ج) ٣ × ٣ د) ٣ × ٤

(٣) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣، ٦، ٨} تساوى:

أ) ٨ × ٦ × ٣ ب) ٤ × ٣ × ٣ ج) ٤ × ٣ × ٢ د) ٢ × ٣ × ١

(٤) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر { ٢، ٣، ٥}

(٥) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذ ة من العناصر { ٢، ٣، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد ٦؟

(٦) تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها؟ بفرض أنه لايوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص.

(٧) كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٢، ٥، ٨، ٩} بحيث تكون أصغر من ٩٠٠؟

(٨) إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى احدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار ، أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل

Factorial of a Number - Permutations

سوف تتعلم

- مضروب العدد
- التباديل

المصطلحات الأساسية

- مضروب العدد
 Factorial of a Number
- التباديل
 Permutatuins
- التباديل الجزئية
 Sub–Permutatuins

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

فكر و ناقش

استعن بما درسته فى الدرس السابق للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) كم تكون عدد طرق جلوس أربعة طلاب علي ثلاثة مقاعد فى صف؟

٢) كم عدد طرق وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام سباحة استعدادًا للقفز؟

تعلم

تعريف ١

المضروب: مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة $\lfloor ن$ و يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث:

$\lfloor ن = ن (ن - ١) (ن - ٢) ... ٣ \times ٢ \times ١$

لاحظ أن:

- عندما ن = ٠ فإن $\lfloor ٠ = ١$ ، عندما ن = ١ فإن $\lfloor ١ = ١$
- $\lfloor ٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤ \lfloor ٣$ ،
 $\lfloor ٦ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٦ \lfloor ٥$

وبوجه عام فإن: $\lfloor ن = ن \lfloor ن - ١$ حيث $ن \in ص^+$

مثال

١ **أ** أوجد $\frac{\lfloor ١٠}{\lfloor ٨}$ **ب** إذا كان $\lfloor ن = ١٢٠$ فما قيمة ن

الحل

أ $\frac{\lfloor ١٠}{\lfloor ٨} = \frac{\lfloor ٨ \times ٩ \times ١٠}{\lfloor ٨} = ١٠ \times ٩ = ٩٠$

ب $\lfloor ن = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ $\lfloor ن = \lfloor ٥$ لذلك فإن ن = ٥

حاول أن تحل

١ أوجد: **أ** $\frac{\lfloor ١٥}{\lfloor ١٢}$ **ب** $\frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٥} + \frac{\lfloor ٩}{\lfloor ٧}$

مثال

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة:- $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ٢} = ٣٠$

الحل

$\because \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-٢}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\text{ل}_{\text{ن}-٢}}{\text{ل}_{\text{ن}-٢}} = ٣٠$ $\therefore$ ن (ن -١) = ٦ × ٥ $\therefore$ ن = ٦

حاول أن تحل

(٢) إذا كان: $\frac{١}{\text{ل}_{\text{ن}}} + \frac{٢}{\text{ل}_{\text{ن}+١}} = \frac{٥٦}{\text{ل}_{\text{ن}+٢}}$ فأوجد قيمة ن

تفكير ناقد: إذا كان: ل = ن فما قيمة أ؟

التباديل *Permutations*

مثال تمهيدى: من مجموعة الأرقام {٢، ٣، ٥} كم عدد الأعداد التى يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة منها؟

الأعداد هى: ٥٣٢ ، ٣٥٢ ، ٥٢٣ ، ٢٥٣ ، ٣٢٥ ، ٢٣٥ يسمى كل عدد من هذه الأعداد تبديله للأرقام.

وعددها = ٣ × ٢ × ١ وتكتب $\text{ل}_{٣}^{٣}$ وتقرأ (٣ لام ٣).

والجدول التالى يوضح ذلك:

الآحاد	العشرات	المئات
١	٢	٣

لذلك فإن التبديله لعدد من الأشياء هى وضعها فى ترتيب معين.

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}}$ حيث:

$\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+١)$ حيث ر ≤ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$

$\text{ل}_{٠}^{\text{ن}} = ١$

فمثلا:

$\text{ل}_{٣}^{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ = \frac{١ \times ٢ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣} \times ٤ \times ٥ \times ٦ = \frac{٦\text{ل}}{٣-٦\text{ل}}$

$\text{ل}_{٣}^{٦} = \frac{٦\text{ل}}{٣-٦\text{ل}}$

$\text{ل}_{٥}^{٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \frac{١ \times ٢}{١ \times ٢} = \frac{٧\text{ل}}{٥-٧\text{ل}}$

نستنتج مما سبق أن:

$\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = \frac{\text{ن}\text{ل}}{\text{ن}-\text{ر}\text{ل}}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ر ≤ ن

استخدام الحاسبة

يرمز للتباديل بالحاسبة العلمية بالرمز $^{n}P_{r}$ ونستخدم فيها المفاتيح Shift ×

لحساب قيمة $\text{ل}_{٣}^{٥}$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح

5 Shift × 2 =

الجواب = ٢٠

مثال

(٣) أوجد قيمة كل من:

أ $\text{ل}_{٤}^{٧}$ ب $\text{ل}_{٤}$ ج $\text{ل}_{٣}^{٤}$

الحل

أ $\text{ل}_{٤}^{٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$

ب $\text{ل}_{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

ج $\text{ل}_{٣}^{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ ماذا تلاحظ من العبارتين ب ، جـ؟

حاول أن تحل

(٣) احسب قيمة كل من: أ $ل_{٢}^{٥} + ل_{٣}^{٦}$ ب $\frac{ل_{٥}^{٥}}{ل_{٤}^{٥}}$

مثال

(٤) أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد.

الحل

لدينا ٧ مقاعد يراد اختيار خمسة منها فى كل مرة

∴ عدد الطرق = $ل_{٥}^{٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٢٥٢٠$

استخدام الآلة الحاسبة: 7 SHIFT × (npr) 5 =

حاول أن تحل

(٤) كم يبلغ عدد الكلمات التى يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية.

مثال

(الترتيب فى دائرة)

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٤ أشخاص فى أربعة مقاعد على شكل دائرة

الحل

فى هذه الحالة يجلس الشخص الأول بطريقة واحدة ، أما الشخص الثانى فيجلس بطرق عددها ٣ الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٢ والأخير يجلس بطريقة وحيدة.

عدد طرق ترتيبهم = $٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor ٣ = ٦$

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج عدد طرق ترتيب ن من الاشخاص فى دائرة؟

حاول أن تحل

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٩ أشخاص فى تسعة مقاعد على شكل دائرة.

مثال

(٦) إذا كان $ل_{ر}^{٧} = ٨٤٠$ فأوجد قيمة $\lfloor ر - ٤$

٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٤	٤
١	

الحل

نبدأ بقسمة العدد ٨٤٠ على ٧ ثم بقسمة ناتج القسمة على ٦ ثم نقسم ناتج القسمة على ٥ وهكذا حتى نصل إلى العدد ١

∴ العدد ٨٤٠ = $٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ل_{٤}^{٧}$

∴ $ل_{ر}^{٧} = ل_{٤}^{٧}$ ∴ ر = ٤ ∴ $\lfloor ر - ٤ = \lfloor ٠ = ١$

حاول أن تحل

(٦) إذا كان $ل_{ر-١}^{٩} = ٥٠٤$ فأوجد قيمة $\lfloor ر + ١$

تفكير ناقد: **١)** أوجد قيمة كلاً من: $ل_{٧}^{٧}$ ، $\lfloor ٧$ **ماذا تلاحظ؟**

تمـــاريـن ٢ – ٢

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات من (١) إلى (٧) :

(١) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة

أ ٢ ب ٢٣ ج ٦٦ د ١٣٢

(٢) إذا كان ٥ل ر = ٦٠ فإن ر تساوى

أ ٤ ب ٣ ج ٢ د ٥

(٣) إذا كانت ن ل ٣ = ١٢٠ فإن قيمة ن:

أ ٦ ب ٥ ج ٤ د ٣

(٤) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى

أ ٤ ب ٩ ج ١٠ د ٢٤

(٥) عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوى

أ ٤٨ ب ٣٠ ج ١٢ د ٤

(٦) عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى دائرة يساوى

أ ١ ب ٧ ج ٧٢٠ د ٥٠٤٠

(٧) رقم تليفون يتكون من ٨ منازل

.....						جـ	٩

جـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣، ٤، ٥، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد، كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة.

أ ٤٩٩٩٩٩ ب ٤٠٠٠٠٠٠ ج ٤٩٩٩٩٩٩ د ١٠٠٠٠٠٠٠

(٨) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - كبدة) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثِّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية).

(٩) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

(١٠) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

(١١) كم عددًا زوجيًّا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤؟

(١٢) بكم طريقةٍ يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و٤ سيدات؟



(١٣) يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاث أحجام (صغير ، متوسط ، كبير) وخمس نكهات (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاته).
كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحدة من الآيس كريم؟

(١٤) من مجموعة الحروف {أ ، ب، جـ ، د، هـ ، و} أوجد
أ عدد طرق اختيار حرف واحد
ب عدد طرق اختيار حرفين مختلفين

(١٥) أوجد قيمة كلٍّ من:
أ $\frac{|٧}{|٥} \div$
ب $٣ \times \frac{|٢}{|٣}$
ج $^{٥}ل_{٢} \times |٢$
د $^{٣}ل_{٣} \times ^{٢}ل_{٢}$
هـ $^{٨}ل_{١} + ^{٨}ل_{٢}$
و $^{٧}ل_{٠} + ^{٧}ل_{٧}$

(١٦) أوجد قيمة ن التى تحقق كل من:
أ $\frac{|ن}{|٢٤} = ٢٤$
ب $\frac{|ن + ١}{|ن - ١} = ٤٢$
ج $^{١٥}ل_{٣} = ٢٧٣٠$
د $^{ن}ل_{٠} + ^{ن}ل_{١} + ^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

(١٧) أوجد قيمة ن إذا كان:
أ $^{٧}ل_{ن} = ٢١٠$
ب $ن \frac{|٢ن}{|ن - ١} = ١٢$

(١٨) إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times ^{ن-٢}ل_{٢}$ فأوجد قيمة ن.

(١٩) أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص.

(٢٠) من بين ثمانية طلاب، بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الأخر) للأشتراك فى فرق كرة القدم وكرة السلة وكرة الطائرة على الترتيب.

(٢١) أثبت أن: $\frac{|ن + ٢}{|ن} = ^{ن+٢}ل_{٢}$

نشاط

١- إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}
أ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
ب كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
ج كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
د كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
هـ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

التوافيق

Combinations

سوف تتعلم

- مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- مثلث باسكال.

المصطلحات الأساسية

توافيق	*Combinations*
عناصر	*Elements*
ترتيب	*Order*
لجنة	*Committee*
مجموعة جزئية	*Subset*

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية - حاسب آلى

أضف إلى معلوماتك

يمكن أن تكتب التوافيق على الصورة $ق_ر^ن = \binom{ن}{ر}$

تمهيد



يراد اختيار ناديين من بين مجموعة مكونة من أربعة أندية { أ ، ب جـ ، د} فى إحدى مباريات كرة القدم ، فإن كل التبديلات الممكنة هى:

(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، ى) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ)، (ب ، ى)، (جـ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، ى) ، (ى ، أ) ، (ى ، ب) ، (ى ، جـ).

نلاحظ من البيان السابق أن الاختيار (أ ، ب) يختلف عن الاختيار (ب، أ) وهكذا...

فإذا أردنا الاختيار مما سبق دون مراعاة للترتيب فإن جميع الاختيارات الممكنة هى:

{ أ ، ب} ، { أ ، جـ} ، { أ ، ى} ، {ب ، جـ} ، {ب ، ى} ، { جـ ، ى}.

ويسمى كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقة"

التوافيق *Combinations*

تعريف

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر فى نفس الوقت هو $ق_ر^ن$ حيث ، $ر \le� ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in صـ^+$

فى التمهيد السابق نجد أن:

يرمز لعدد توافيق ٤ عناصر مأخوذة منها ٢ فى كل مرة بالرمز $ق_٢^٤$ وتقرأ (٤ قاف ٢)

أو بالرمز $\binom{٤}{٢}$ وتقرأ (٤ فوق ٢)

ونلاحظ فى هذا التمهيد أن عدد طرق الاختيار = ٦ طرق .

أى أن: $ق_٢^٤ = \frac{ل_٢^٤}{\lfloor ٢} = \frac{٣ \times ٤}{١ \times ٢} = ٦$

أى : $ق_ر^ن = \frac{ل_ر^ن}{\lfloor ر}$

مثال

(١) أوجد ناتج كل من

أ $ق_٥^٧$ ب $ق_٢^٧$ (ماذا تلاحظ)

الحل

أ $ق_٥^٧ = \frac{ل_٥^٧}{\lfloor ٥} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٢١$

ب $ق_٢^٧ = \frac{٦ \times ٧}{١ \times ٢} = ٢١$

نلاحظ أن: $^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ (لاحظ أن: ٥ + ٢ = ٧)

نتائج هامة: $^{ن}ق_{ر} = \frac{\text{ل}ن}{\text{ل}ر \times \text{ل}(ن-ر)}$ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة $^{١٢}ق_{٩}$: $^{١٧}ق_{١٤}$ بدون استخدام الحاسبة.

نشاط استخدم الحاسبة

يمكن استخدام المفاتيح SHIFT ÷ من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق $({}^{n}C_{r})$

(١) باستخدام الحاسبة أوجد قيمة $^{٥}ق_{٤} + {}^{٧}ق_{٢}$

الحل

بالضغط على المفاتيح بالتتابع 5 SHIFT ÷ 4 + 7 SHIFT ÷ 2 = ← ابدأ

الناتج = ٢٦

مثال

(٢) إذا كان: $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}$

الحل

∵ $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}$

اما: ر = ٢ ر - ٤٧ أى أن: ر = ٤٧

وهى اكبر من قيمة ن ، لذلك هى ترفض

أو: ر + ٢ ر - ٤٧ = ٢٨ ∴ ٣ ر = ٧٥ ∴ ر = ٢٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٥}$ فأوجد قيمة ر.

مثال

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص.

الحل

حيث إن الاختيار لايعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقًا.

عدد الاختيارات = $^{٩}ق_{٤} = \frac{\text{ل}٩}{\text{ل}٤ \times \text{ل}٥} = ١٢٦$

حاول أن تحل

(٣) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج، بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين . أوجد عدد مباريات المسابقة.

مثال

مبدأ عد

(٤) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات.

الحل

عدد طرق اختيار رجلين من ٧ رجال = $^{٧}ق_{٢}$ = ٢١

عدد طرق اختيار سيدة من ٥ سيدات = $^{٥}ق_{١}$ = ٥

وطبقا لمبدأ العد فإن عدد طرق تكوين اللجنة = ٢١×٥ = ١٠٥ طريقة

تفكير ناقد: بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال و ٣ سيدات من بين ٦رجال و٥ سيدات؟

حاول أن تحل

(٤) فصل دراسى به ١٠ طلاب، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

نشاط

مثلث باسكال



بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢):

هو فيلسوف فرنسى ورياضى وفيزيائى، قدم نظرية الاحتمالات وصمم تنظيمًا ثلاثيًّا من الأرقام سمى مثلث باسكال فى حساب الاحتمالات، واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدى عمليات الجمع والضرب.

تأمل مثلث الأعداد المقابل، ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١- ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا المثلث؟

٢- هل توجد علاقة بين عدد عناصر كل صف والصف الذى يليه مباشرة؟

٣- هل يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبي ضلعى المثلث؟

			١											
		١		١										
	١		٢		١									
١		٣		٣		١								
	١		٤		٦		٤		١					
١		٥		١٠		١٠		٥		١				
	١		٦		١٥		٢٠		١٥		٦		١	
١		٧		٢١		٣٥		٣٥		٢١		٧		١

بعد إجراء النشاط يمكن ملاحظة مايلى:

- الصف الأول: يمثل (ن =١) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١

وبالتالى فإن: $^{١}ق_{٠}$ =١ ، $^{١}ق_{١}$ = ١

- الصف الثانى: يمثل (ن =٢) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١ أو ر = ٢ فى كل مرة.

فيكون: $^{١}ق_{٠}$ = ١، $^{٢}ق_{١}$ = ٢ ، $^{٢}ق_{٢}$ =١ وهكذا

كما نلاحظ أن:

- كل صف يبدأ بالواحد لأن $ن_{ق_{ر}} = ١$ ، وينتهى بالواحد لأن $ن_{ق_{ن}} = ١$
- كل عدد فى أى صف باستثناء الصف الأول يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه فى الصف الذى يعلوه مباشرة.
- **ففى الصف الثالث نجد:** ١ ، ١ + ٢ ، ٢ + ١ ، ١
- **وفى الصف الرابع نجد:** ١ ، ١ + ٣ ، ٣ + ٣ ، ٣ + ١ ، ١ وهكذا.
- يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت ن زوجية)
- وتماثل حول العددين الذين يتوسطان الصف (إذا كانت ن فردية)
- وهذا مايطابق العلاقة السابقة $ن_{ق_{ر}} = ن_{ق_{ن-ر}}$

تطبيق على النشاط:

أثبت أن: $(ق_{ن} + ق_{١})^{٢} + (ق_{٢} + ق_{٣})^{٢} + (ق_{٤} + ق_{٥})^{٢} = ٢^{٢}$

تمـــارين ٢ – ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات

(١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى.....

أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٣٥

(٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى.....

أ) ٣٠ ب) ١٥ ج) ٢٤ د) ١٠

(٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء يساوى.....

أ) ١٥ ب) ٨ ج) ٦٠ د) ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٤) احسب قيمة $ق_{٣}^{٦}$ ، $ق_{١}^{٩}$ ، $ق_{١١}^{١٢}$ ، $ق_{.}^{١٠٠}$

(٥) إذا كان $ن_{ق_{٣}} = ١٢٠$ أوجد قيمة $ن_{ق_{ن-٩}}$

(٦) إذا كان $ن_{ق_{٤}}^{ن+١} = \frac{٥}{٢}$ $ن_{ق_{٣}}$ فأوجد قيمة ن.

(٧) إذا كان $ن_{ق_{٣}} = \frac{١}{٣}$ ٣٠ن فأوجد قيمة ن.

(٨) بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية؟

(٩) يوجد فى أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

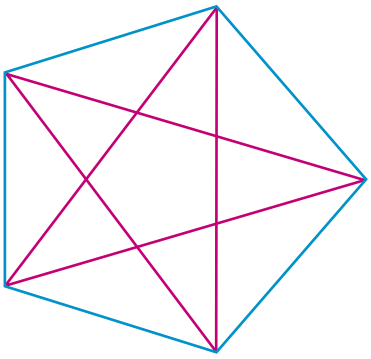
(١٠) اكتب بدلالة التباديل كل من:

أ $ق_{٨}^{٨}$ ب $ق_{٣}^{١٩}$ ج $ق_{٠}^{٥}$ د $ق_{ص-س}^{س}$

(١١) اكتب مستخدمًا الصورة $ق_{ر}^{ن}$ كل ممايأتى:

أ $\frac{ل_{٢}^{٨}}{\lfloor ٢}$ ب $\frac{ل_{٣}^{٩}}{\lfloor ٣}$ ج $\frac{ل_{٤}^{١٠}}{\lfloor ٤}$ د $\frac{ل_{٠}^{٨}}{\lfloor ٠}$

نشاط



سبق أن درست أن قطر الشكل الهندسى هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليتين وعلمت أن:

عدد أقطار المثلث = صفر

عدد أقطار الشكل الرباعى = ٢

عدد أقطار الشكل الخماسى = ٥

فهل يمكنك إيجاد عدد أقطار الأشكال الآتية:

(١) الشكل السداسى ، الشكل الثمانى ، شكل هندسى ذو عشرة أضلاع.

(٢) هل يمكنك استخدام التوافيق لكتابة قاعدة توجد من خلالها عدد أقطار أى شكل هندسى ؟ ابحث ذلك مع معلمك ومن خلال الشبكة الدولية للمعلومات.

ملخص الوحدة

مبدأ العد الأساسى: إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة ، وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة فإن عدد طرق إجراء العمل الأول والعمل الثانى = م × ن طريقة.

التباديل: إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ن فإن كل ترتيب لبعض أو كل عناصر هذه المجموعة يسمى تبديلًا.
لتكن سـ مجموعة عدد عناصرها ن، فإن كل ترتيب عدد عناصره ر يمكن تكوينه من المجموعة سـ يسمى تبديلاً ، حيث ٠ ≤ ر ≤ ن ، ويرمز لعدد التبديلات الجزئية المكونة من ر عنصر المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها ن بالرمز $ل_{ر}^{ن}$ (وتقرأ ن لام ر)

$ل_{ر}^{ن}$ = ن(ن - ١) (ن - ٢)... (ن - ر + ١) حيث ٠ ≤ ر ≤ ن

نظرية: عدد التبديلات الممكنة من مجموعة عدد عناصرها ن يساوى ن (ن - ١) (ن - ٢)... × ٣ × ٢ × ١ ويرمز لحاصل الضرب السابق بالرمز $\lfloor ن$ (ويقرأ مضروب ن)

التوافيق: إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ن ، فإن كل اختيار عدد عناصره ر حيث (٠ ≤ ر ≤ ن) يمكن أخذه من عناصر المجموعة سـ دون مراعاة للترتيب يسمى توفيقًا.

➢ ويرمز لعدد التوفيقات المكونة من ر عنصر المأخوذة من ن عنصر بالرمز $ق_{ر}^{ن}$ (ويقرأ ن قاف ر)

تمـــاريـن عامة

أكمل مايأتى:

(١) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام ١، ٢، ٣، ٤ يساوى.....

(٢) إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٣ أرقام ليس بينها الصفر، فإن عدد الطرق يساوى.....

(٣) إذا كان $^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = {}^{٢}ق_{ن}$ فإن ن = ...

(٤) إذا كان $\frac{\text{ن}!}{\text{ن}-١!} = ١$ فإن ن = ...

اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات {أ، ب، جـ} وأراد أن يختار لونها من بين الألوان:{أبيض، أحمر، فضى، أسود} بكم طريقة يمكن اختيار السيارة .

أ ٧ ب ١٢ جـ ١٤ د ٢٤

(٦) كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١، ٣، ٦، ٧

أ ٩ ب ١٢ جـ ٢٤ د ٦٤

(٧) إذا كانت س = {س:س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥} وكانت ص = {(أ، ب): أ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} كم عدد عناصر ص

أ ٧ ب ١٠ جـ ٢٠ د ٢٥

(٨) $^{١٢}ق_{٤} + {}^{١٢}ق_{٣}$ يساوى

أ ٧١٥ ب ٧١٠ جـ ٧١٦ د ٧٢٠

(٩) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٣٣٦$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٥٦$ فإن ن ، ر هما

أ (٣، ٢) ب (٨، ٣) جـ (٧، ٤) د (٧، ٣)

(١٠) إذا كان $^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن $^{٢٥}ق_{ن}$ يساوى

أ ٢٤ ب ٢٥ جـ ١ د ٤٩

(١١) احسب قيمة كل من:

أ $^{٥}ق_{٥}$ ب $\frac{٦!}{}$ جـ $^{٢٣}ل_{١}$

د $^{٥٠}ق_{٤٩}$ هـ $\frac{١٣!}{١٤!}$ و $^{٤}ل_{٤}$

(١٢) إذا كان $^{٢}ق_{ن-١} = ٨٤$ فما قيمة $\frac{\text{ن}!}{٥-\text{ن}!}$

(١٣) إذا كان $^{٨}ل_{ر+١} = ٣٣٦$ فما قيمة $^{٢}ق_{ر}$

(١٤) إذا كان $^{ن-٣}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{ن+٣}ق_{٤} = ٧١٥$ فأوجد قيمة كل من م ، ن

(١٥) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية.

(١٦) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد(ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب

(١٧) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجل وسيدتين من بين ٧ رجال و٥ سيدات؟

(١٨) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار. أوجد عدد طرق الاختيار؟

(١٩) يبلغ عدد فرق الدورى الممتاز لكرة القدم ١٢ فريقًا، فإذا كان كل فريق يلعب مباراتين مع كل فريق من باقى الفرق. أوجد عدد مباريات الدورى بأكمله.

(٢٠) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ $\frac{\lfloor ن+٣}{\lfloor ن+١} = ٤٢$ ب $\lfloor ن = ١٢ \times \lfloor ن+٢$ ج $\lfloor ن-٤ = ١٢٠$

د $\lfloor ن-٥ = ١$ هـ $ق_{ن} = ٨٤$ و $ق_{ر}^{١٢} = ق_{ر+٣}^{١٢}$

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(١) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣، ٤، ٥ هو

أ ٦ ب ٣ ج ١ د صفر

(٢) عدد طرق تكوين العدد ٥٤٧٦ من الأعداد ٤، ٥، ٦، ٧ هو

أ ٢٤ ب ١٦ ج ١ د صفر

(٣) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٥ أرقام غير الصفر هو

أ ٥ × ٤ × ٣ ب ٥ + ٤ + ٣ ج ٥ × ٥ × ٥ د ٣ × ٢ × ١

(٤) إذا استخدمت حروف كلمة سلم فى كتابة كلمة من ثلاثة حروف مختلفة فإن عدد الكلمات الناتجة يساوى

أ ٣ ب ٦ ج ٩ د ١

(٥) $ل_{٦}^{٩}$ تساوى

أ ٩ × ٨ × ٧ ب ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ ج $\frac{\lfloor ٩}{\lfloor ٦}$ د $\lfloor ٦$

(٦) أوجد قيمة كل من:

أ $ق_{٠} + ق_{١}^{٠} + ق_{٢}^{٠} + ق_{٤}^{٠} + ق_{٥}^{٠}$ ب $ق_{٠} - ق_{١}^{٠} + ق_{٢}^{٠} - ق_{٣}^{٠} + ق_{٤}^{٠} - ق_{٥}^{٠}$

(٧) أوجد: $^{٨}ل_{٣} + {}^{٨}ل_{٢} + {}^{٨}ل_{١}$

(٨) ٥ نقط فى مستوى لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد كم مثلثًا يمكن تكوينه منها؟

(٩) كم عددًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}؟

(١٠) أوجد قيمة كلٍّ من:

أ $\frac{|٩٩}{|١٠٠}$ ب $\frac{|٠}{|٠} + \frac{|١}{|١} + \frac{|٢}{|٢} + \frac{|٣}{|٣}$ جـ $\frac{|١٩}{|٢٠}$

د $|٥ - |٤$ هـ $\frac{|٤}{|٠}$

(١١) إذا كانت س = {-٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣}

وكانت ع = {(أ، ب): أ ≠ ب، أ، ب ∈ س} أوجدعدد عناصر ع

(١٢) أوجد قيمة ن فى الحالات الآتية:

أ $|ن = ٧٢٠$ ب $ن |٢ن-١ = ٦٠$ جـ $ن ق_{ن-٢} = ٢٨$

د $^{ن+٢}ل_{٤} = ٥٦ \times {}^{ن}ل_{٢}$ هـ $\frac{١}{|ن} = \frac{٢}{|ن+١}$ و $^{٢}ل_{ن} = ٢٤ \, ^{٢}ق_{ن}$

إن لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
أرجع إلى	مبدأ عد	مبدأ عد	مبدأ عد	مبدأ عد	تباديل	توافيق	تبادل	توافيق	مبدأ عد	مضروب العدد	توافيق	تباديل توافيق



الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل

Calculus

مقدمة الوحدة

مما لاشك فيه أن علم التفاضل والتكامل من العلوم الحديثة التى تستخدم فى فروع معرفية عديدة، وفى سياقات علمية متنوعة مثل الهندسة والفيزياء والطب والاقتصاد والجغرافيا فيهتم علم التفاضل بدراسة التغيرات والفروق (الكميات المتغيرة) من خلال حسابات تتضمن متوسطات ومعدلات التغير فتلاحظ مقارنة التغير بمعدل ينسب إليه كمعدل التغير فى درجات الحرارة - السعر - السرعة - الإنتاج ... كذلك دراسة سلوك الدوال مثل دوال التكاليف والربح فى الاقتصاد؛ لتعظيم الربح أو دراسة أثر تناول عقار معين فى خفض مدة العلاج أو دراسة مخططات حزام الزلازل عند التخطيط لإنشاءات عمرانية وحساب معدلات الإجهاد وغيرها، أما حساب التكامل فهو يبحث فى إيجاد الكمية بمعلومية معدل تغيرها، ويستخدم لحساب المساحة تحت المنحنى، ومقدار الشغل الناتج عن تأثير قوة متغيرة، ويتضمن التفاضل والتكامل حساب عمليات مع كميات متناهية فى الصغر خلافًا لعلم الجبر.

وأخيرًا فإن سعينا لفهم دقائق هذه المادة سيساعد فى حل الكثير من المشكلات المتداخلة مع كثير من العلوم الدقيقة، التى بها تبنى النهضة العلمية والحضارية التى نرجوها لبلدنا.

مخرجات تعلم الوحدة:

بعد دراسة هذه الوحدة. وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق (التفاضل).
 - مشتقة الدالة الثابتة.
 - مشتقة الدالةد: د(س) = $س^{ن}$
 - مشتقة الدالة د : د(س) = س
 - مستقة الدالةد: د(س) = $أ س^{ن}$
 - مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما
 - مشتقة حاصل ضرب دالتين.
 - مشتقة خارج قسمة دالتين.
 - مشتقة دالة الدالة - قاعدة السلسلة.
 - مشتقة الدالة ص = (د(س))^{ن}
- يستخدم المشتقات فى تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس لمنحنى عند نقطة عليه.
- يتعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.
- يتعرف قواعد التكامل الآتية:
 - $\int س^{ن}\,ى س = \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$
 - $\int أ\,د(س)\,ى س = أ \int د(س)\,ى س$، حيث أ ثابت
 - $\int [د(س) \pm ر(س)]\,ى س = \int د(س)\,ى س \pm \int ر(س)\,ى س$
 - $\int (أ س + ب)^{ن}\,ى س = \frac{١}{أ(ن+١)} (أ س + ب)^{ن+١} + ث$، $ن \neq -١$

المصطلحات الأساسية

التغير	*Variation*
متوسط التغير	*Average Rate of Change*
معدل التغير	*Rate of Change*
الاشتقاق	*Differentiation*
دالة قابلة للاشتقاق	*Differintiable Function*
المشتقة الأولى	*First Derivative*
حاصل الضرب	*Product*
خارج القسمة	*Quotient*
مشتقة عكسية	*Antiderivative*
تكامل	*Integration*

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): معدل التغير.

الدرس (٣ - ٢): الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٣): قواعد الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٤): التكامل

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

مخطط تنظيمى للوحدة



٣-١ معدل التغير

Rate of Change

سوف تتعلم

- مفهوم دالة التغير.
- مفهوم متوسط التغير.
- مفهوم معدل التغير.

المصطلحات الأساسية

- دالة التغير
 Function of Variation
- متوسط التغير
 Average of Change
- معدل التغير
 Rate of Change

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

لماذا تترك مسافات بين قضبان السكك الحديدية أو فواصل الكبارى المعدنية؟

إذا ارتفعت درجة حرارة من ٣٠° إلى ٤٢° فى فترة ما أو انخفضت من ٤٨° إلى ٢٢° فى فترة أخرى - احسب التغير فى درجات الحرارة لكل فترة ... ماذا تلاحظ؟

إذا كان طول أحد القضبان ل مترًا وتغيرت درجة حرارته س من $س_1$ إلى $س_2$ نقول إن تغيرًا حدث فى درجة الحرارة و يكون :

التغير فى س = قيمة س عند نهاية التغير - قيمة س عند بداية التغير

هل يتغير طول هذا القضيب تبعًا لتغير درجة حرارته؟

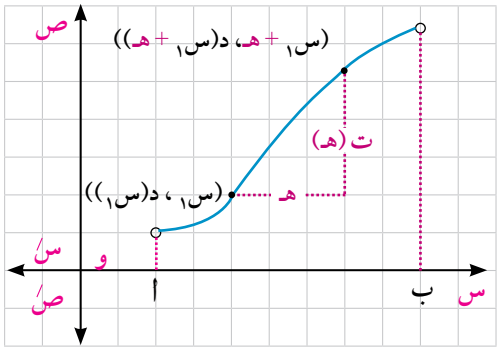
تعلم

دالة التغير *Function of Variation*

إذا كانت د: [أ، ب] ⟵ ع حيث ص = د(س) فإن أى تغير فى قيمة س من $س_1$ إلى $س_2$ فى مجال د يقابله تغير فى قيمة ص من د($س_1$) إلى د ($س_2$) وعليه فإن :

مقدار التغير فى س = Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_2 - س_1$ ،

مقدار التغير فى ص = Δص = د($س_2$) - د($س_1$)



وباعتبار ($س_1$ ، د($س_1$)) نقطة على منحنى الدالة د، فإن لكل تغير فى إحداثيها السينى من $س_1$ إلى $س_2 = س_1 + هـ$ بحيث $س_1 + هـ \in$ [أ ، ب] ، هـ $\neq$ ٠

يحدث تغير مناظر فى إحداثيها الصادى يتعين بالعلاقة :

ت(هـ) = د($س_1$ + هـ) - د($س_1$)

وتسمى الدالة ت بدالة التغير فى د عند س = $س_1$

ملاحظة:

كلا الرمزين Δس أو هـ يمثلان التغير فى س

مثال

(١) إذا كانت د(س) = ٣س^{٢} + س - ٢

وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ت، ثم احسب مقدار التغير فى د عندما

(أ) هـ = ٠,٣ (ب) هـ = - ٠,١

الحل

∵ د (س) = ٣ س^{٢} + س - ٢ ، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ

∴ س$_{١}$ = ٢ ، د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ - ٢ = ١٢ ، ويكون :

د (٢ + هـ) = ٣ (٢ + هـ)^{٢} + (٢ + هـ) - ٢ = ١٢ + ١٢هـ + ٣هـ^{٢} + ٢ + هـ - ٢

= ٣ هـ^{٢} + ١٣هـ + ١٢

ت (هـ) = د(٢ + هـ) - د(٢)

= (٣هـ^{٢} + ١٣ هـ + ١٢) - ١٢ = ٣هـ^{٢} + ١٣ هـ

(أ) عندما هـ = ٠,٣

ت(٠,٣) = ٣(٠,٣)^{٢} + ١٣ × ٠,٣

= ٤,١٧

(ب) عندما هـ = - ٠,١

ت(- ٠,١) = ٣ (- ٠,١)^{٢} + ١٣ (- ٠,١)

= - ١,٢٧

حاول أن تحل

(١) إذا كانت د(س) = س^{٢} - س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب:

(أ) ت(٠,٢) (ب) ت(- ٠,٣)

تعلم دالة متوسط التغير *Function of Average of Change*

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة م تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = س$_{١}$

حيث :

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ} \quad \text{أو} \quad \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

مثال

(٢) إذا كانت د:]-∞، ٠[⟵ ع حيث د(س) = س^{٢} + ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم إحسب م (٠,٣)

(ب) متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٣ إلى ٤

الحل

(أ) د(س$_{١}$) = د(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٥ ، د (س$_{١}$ + هـ) = د (٢ + هـ)

∴ د(٢ + هـ) = (٢ + هـ)^{٢} + ١ = هـ^{٢} + ٤ هـ + ٥

∵ م (هـ) = $\frac{\text{د(س}_{١}\text{ + هـ) - د(س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$

∴ م (هـ) = $\frac{\text{هـ}^{٢}\text{ + ٤ هـ + ٥ - ٥}}{\text{هـ}}$ = هـ + ٤ ويكون م (٠,٣) = ٤,٣

ب عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ فإن س$_{١}$ = ٣ ، س$_{٢}$ = ٤

ويكون د(٣) = ٩ + ١ = ١٠ ، د(٤) = ١٦ + ١ = ١٧

متوسط التغير = $\frac{\text{د(س}_{٢}\text{) - د(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢}\text{ - س}_{١}}$ = $\frac{١٧ - ١٠}{٤ - ٣}$ = ٧

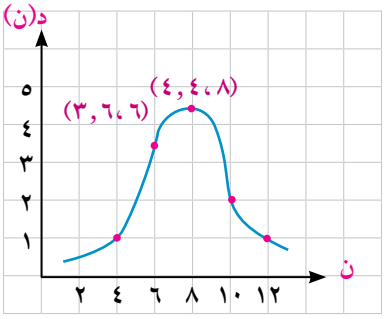
حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٣س - ١ فأوجد :

أ دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م (٠,٢)

ب متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

مثال



(٣) يوضح الشكل المقابل المنحنى ر = د(ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات، ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم ، متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

أ ن = ٤ إلى ن = ٨ ب ن = ٨ إلى ن = ١٠

الحل

أ من الرسم : د(٨) = ٤,٤ ، د(٤) = ١

متوسط التغير فى د = $\frac{\text{د(٨) - د(٤)}}{٨ - ٤}$ = $\frac{٤,٤ - ١}{٤}$ = ٠,٨٥ مليون جنيه / شهر

أي أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة .

ب من الرسم : د(١٠) = ٢ ، د(٨) = ٤,٤

متوسط التغير فى د = $\frac{\text{د(١٠) - د(٨)}}{١٠ - ٨}$ = $\frac{٢ - ٤,٤}{٢}$ = - ١,٢ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة.

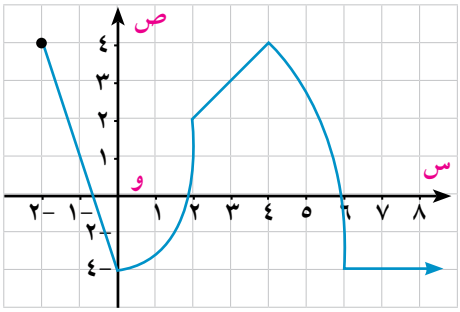
حاول أن تحل

(٣) مستخدمًا الشكل الموضح فى مثال (٣) أوجد متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

أ ن = ٤ إلى ن = ٦ ب ن = ٦ إلى ن = ١٠ ج ن = ٤ إلى ن = ١٢

تفكير ناقد :

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س). حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك.



تعلم

دالة معدل التغير

Function of Rate of Change

إذا كانت د:] أ ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) ، س$_{١}$ ، س$_{١}$ + هـ ∈] أ ، ب[فإن:

دالة معدل التغير فى د عند س$_{١}$ = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to 0}$ م (هـ) بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

٤ أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = س$_{١}$ لكل ممايأتى ثم أوجد هذا المعدل عند قيم س المعطاة

أ د(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، س = ٢

ب د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ ، س = ٣

الحل

أ ∵ د(س) = ٣س^{٢} + ٢ ∴ عندما س = س$_{١}$ فإن د(س$_{١}$) = ٣س$_{١}^{٢}$ + ٢،

د(س$_{١}$ + هـ)^{٢} = ٣ (س$_{١}$ + هـ)^{٢} + ٢ = ٣س$_{١}^{٢}$ + ٦ س$_{١}$ هـ + ٣هـ^{٢} + ٢

دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{٦ س_{١} هـ + ٣هـ^{٢}}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to 0}$ (٦س$_{١}$ + ٣هـ) = ٦س$_{١}$

عند س = ٢ ∴ س$_{١}$ = ٢ ويكون معدل التغير فى د = ٦ × ٢ = ١٢

ب ∵ د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ ∴ عندما س = س$_{١}$ فإن :

د(س$_{١}$ + هـ) - د(س$_{١}$) = $\frac{٢}{س_{١} + هـ - ١} - \frac{٢}{س_{١} - ١}$

= $\frac{٢س_{١} - ٢ - ٢س_{١} - ٢هـ + ٢}{(س_{١} + هـ - ١)(س_{١} - ١)}$ = $\frac{- ٢ هـ}{(س_{١} + هـ - ١)(س_{١} - ١)}$

دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{١}{هـ} \times \frac{- ٢ هـ}{(س_{١} + هـ - ١)(س_{١} - ١)}$ = $\frac{- ٢}{(س_{١} - ١)^{٢}}$

عند س = ٣ ∴ س$_{١}$ = ٣ ويكون معدل التغير فى د = $\frac{- ٢}{(٣ - ١)^{٢}}$ = - $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

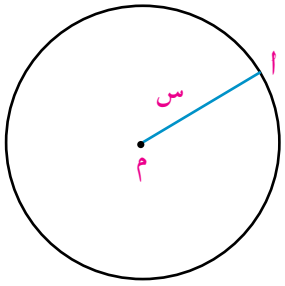
٤ أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ ثم استنتج معدل التغير فى د عند س = ٥

مثال

٥ **تطبيقات حياتية:** سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية تتسع بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى . أوجد معدل التغير فى مساحة سطحها بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ٣,٥سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

نمذجة المشكلة:



بفرض أن طول نصف قطر الموجه = س سم

∴ مساحة الصفيحة مـ = π س^{٢} سم^{٢}

ويكون مـ = د(س) = π س^{٢}

عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ

فإن دالة معدل التغير فى مـ = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\pi (س_{١} + هـ)^{٢} - \pi س_{١}^{٢}}{هـ}$

$= \pi \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_{١} + هـ)^{٢} - س_{١}^{٢}}{هـ} = \pi ٢ س_{١}$

عندما س = س$_{١}$ = ٣,٥ ∴ معدل التغير فى مـ = $٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٣,٥ = ٢٢$

حاول أن تحل

٥ صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣سم إلى ٣,٤سم، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥سم.

تمـارين (٣-١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى

أ ٠,٣٢ ب ٠,٤٨ جـ ٣,٦ د ٧,٢

٢ إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د(٢) = ٦ فإن د(٤) تساوى

أ -٤ ب ٧ جـ ٨ د ١٦

٣ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم يساوى

أ ١٢٥ ب ٣٤٣ جـ ٢١٨ د ١٠٩

٤ متوسط تغير الدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ٣س + ٥ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى.....

أ ١ ب ٣ جـ ٧ د ٩

أجب عن مايأتى:

٥ إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٢ س - ١ أوجد التغير فى د عندما

أ تتغير س من ٢ إلى ٢,١ ب س = - ٢ ، هـ = ١

٦ أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = س$_{١}$ ثم استنتج معدل تغير د عند قيم س$_{١}$ المبينة فيمايلى :

أ د(س) = ٢س^{٣}، س$_{١}$ = ٢ ب د(س) = $\frac{س+١}{س-١}$ ، س$_{١}$ = ٠

٧ **الربط بالمساحات:** صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع، احسب معدل التغيير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨سم.

٨ **الربط بالحجوم:** كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي فأوجد معدل التغيير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧سم.

٩ **اكتشف الخطأ :** صفيحة على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه تتمدد بالتسخين بانتظام بحيث تظل محتفظه بشكلها وبنفس النسبة بين أبعادها، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لعرضها عندما يكون العرض ١٠سم.

الحل الأول

نفرض العرض س، الطول ٢س

المساحة = الطول × العرض ∴ د(س) = ٢س^{٢}

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_{١}+هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ(٢س_{١}+هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} (٤س_{١}+٢هـ) = ٤س_{١}$

عندما س$_{١}$ = ١٠سم

معدل التغير = ٤٠

الحل الثاني

نفرض الطول س، العرض $\frac{١}{٢}$ س

المساحة = الطول × العرض ∴ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_{١}+هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(س_{١}+\frac{١}{٢}هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} (س_{١}+\frac{١}{٢}هـ) = س_{١}$

عندما س$_{١}$ = ١٠سم

معدل التغير = ١٠

الربط بالزراعة:

١٠ إذا كانت الكمية ص (مقيسة بالكيلو جرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد الكيلو جرامات س من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقًا للعلاقة ص = ١٠٠ - $\frac{٤٢}{س+١}$

احسب متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من ١ إلى ٢ .

٢-٣ الاشتقاق

Differentiation

سوف تتعلم

- المشتقة الأولى للدالة
- التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس)

المصطلحات الأساسية

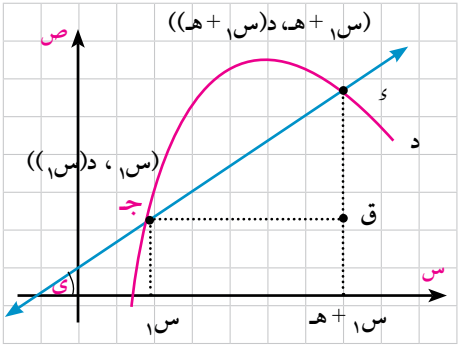
المشتقة الأولى	*First Derivative*
ميل	*Slope*
مماس	*Tangent*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

١ يوضح شكل (١) منحنى د: [أ ، ب] ← ع حيث ص = د(س) ، $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ قاطعا له فى النقطتين حـ (س١ ، د(س١)) ، ئ (س١ + هـ، د(س١ + هـ)).
أوجد ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$.

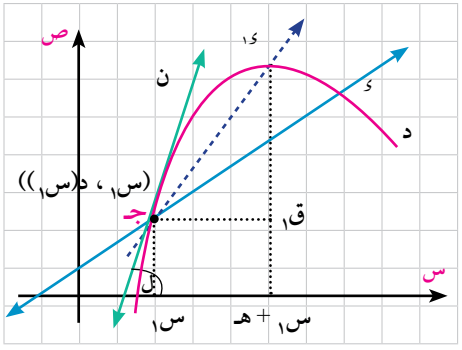


شكل (١)

٢ باعتبار س تتغير من س١ إلى س١ + هـ قارن بين دالة متوسط التغير فى د ، وميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$.
هل العلاقة التالية صحيحة ؟

ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ = ظا ى = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = م (هـ)

٣ إذا كانت النقطة جـ (س١، د(س١)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د ، وتحركت النقطة ئ على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ ليأخذ $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ الوضع $\overleftrightarrow{جـ ن}$ ويصبح مماسًا للمنحنى عند جـ .
أى أن هـ ← صفر
أوجد ميل المماس لمنحنى د عند جـ



شكل (٢)

لاحظ أن :

ميل المماس عند جـ = ظا ل = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ إن وجدت

أي أن :

ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند النقطة (س١، د(س١)) يساوى معدل التغير فى د عند س = س١

مثال

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٥ عند النقطة أ(٢، ٧) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٥ = ٧ ∴ النقطة أ (٢، ٧) تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند (س = ٢) = معدل التغير فى د عند (س = ٢)

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} - ٥ - ٧}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{١٢ هـ + ٣ هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} (١٢ + ٣ هـ) = ١٢$$

ويكون ظا ل = ١٢ ∴ ل = ظا$^{-١}$(١٢) ≃ ٨٥° ١٤′

حاول أن تحل

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٤ عند النقطة أ (١، - ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة .

تعلم

الدالة المشتقة

The Derivative Function

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا فى المتغير س يطلق عليها " الدالة المشتقة" أو : المشتقة الأولى للدالة" أو " المعامل التفاضلى الأول"

تعريف

إذا كانت د :] أ ، ب [⟶ ع ، س ∈] أ ، ب [فإن الدالة المشتقة دَ :

$$دَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

رموز الدالة المشتقة :

إذا كانت ص = د(س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

صَ أو دَ وتقرأ " مشتقة ص" أو " مشتقة د"

$\frac{ى ص}{ى س}$ وتقرأ " دال ص دال س " أو " مشتقة ص بالنسبة إلى س"

لاحظ أن ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_{١}$، د(س$_{١}$)) هو دَ(س$_{١}$)

مثال

(٢) أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د(س) = س^{٢} - س + ١ مستخدمًا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧)

الحل

∵ د(س) = س^{٢} - س + ١

∴ د(س + هـ) = (س + هـ)^{٢} - (س + هـ) + ١ = س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} - س - هـ + ١ ،

د(س + هـ) - د(س) = (٢س + هـ - ١) هـ

∵ د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ ∴ د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢س + هـ - ١) هـ}{هـ}$

د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٢س + هـ - ١) د`(س) = ٢س - ١

∵ د(- ٢) = (- ٢)^{٢} - (- ٢) + ١ = ٧ ∴ النقطة (- ٢، ٧) تقع على منحنى د

ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧) = د`(- ٢) = ٢(- ٢) - ١ = - ٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = ٣ س^{٢} + ٤س + ٧ فاوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (- ١ ، ٦)

تعلم

قابلية الدالة للاشتقاق

Differintiability of a Function

يقال أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمى إلى مجال الدالة) إذا وفقط إذا كانت د`(أ) لها وجود حيث

د`(أ) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

مثال

(٣) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ثم أوجد د`(٥)

الحل

∵ د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ د(س + هـ) = $\sqrt{س + هـ - ١}$

د(س + هـ) - د(س) = $\sqrt{س + هـ - ١}$ - $\sqrt{س - ١}$

د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{\sqrt{س + هـ - ١} - \sqrt{س - ١}}{هـ}$ وبالضرب فى مرافق البسط

$$د'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ - ١) - (س - ١)}{هـ \sqrt{س + هـ - ١} + \sqrt{س - ١}}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ \sqrt{س + هـ - ١} + \sqrt{س - ١}} = \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}} ، س > ١$$

لاحظ أن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١ لعدم وجود النهاية

$$د'(٥) = \frac{١}{٢\sqrt{٥ - ١}} = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$$

حاول أن تحل

(٣) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س + ٥}$

تمـاريـن (٣-٢)

(١) أوجد الدالة المشتقة للدالة د فى كل مماياتى :

أ) د(س) = ٥س + ٢

ب) د(س) = ٣س^{٢}

ج) د(س) = س^{٣} - ١

د) د(س) = س^{٢} + ٢ س.

(٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة د فى كل مماياتى وعين قيم س التى تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق:

أ) د(س) = $\frac{١}{س}$

ب) د(س) = $\frac{١}{س + ٣}$

ج) د(س) = $\frac{٣}{٢س - ٥}$

د) $\sqrt{س - ٤}$

(٣) أوجد مشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{٣} + ٤ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (-١، ٣) الواقعة عليه.

(٤) أوجد مشتقة الدالة د حيث د(س) = أ س + ب عند أى نقطة (س، ص) حيث أ ، ب عددان حقيقيان.

(٥) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٨ عند النقطة أ (٢، ٤) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(٦) إذا كان د(س) = أ س^{٢} + ب حيث أ و ب ثابتان أوجد :

أ) المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س، ص).

ب) قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢، -٣) الواقعة عليه يساوى ١٢.

٣-٣ قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

سوف تتعلم

- مشتقة الدالة الثابتة
- مشتقة د(س) = س ن
- مشتقة د(س) = س
- مشتقة د(س) = أ س ن
- مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما
- مشتقة حاصل ضرب دالتين
- مشتقة خارج قسمة دالتين
- مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- مشتقة ص = (د(س))ن.

المصطلحات الأساسية

المشتقة الأولى	*First Derivative*
حاصل ضرب	*Product*
خارج قسمة	*Quotient*
قاعدة السلسلة	*Chain Rule*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

استكشف

١ - أوجد باستخدام تعريف المشتقةالأولى للدالة مشتقة كل من :

د(س) = س^{٣} د(س) = س^{٥}

٢ - هل يمكنك اكتشاف مشتقة د(س) = س^{٧} دون استخدام التعريف؟

٣ - هل يمكنك استنتاج قاعدة لمشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{ن} ؟

تعلم

مشتقة الدالة *Derivative of a Function*

١ - مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث: جـ ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = ٠$

لاحظ أن :

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

$\therefore \frac{د ص}{د س} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$ = صفرًا (هـ ≠ ٠)

٢ - مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}

إذا كانت ص = س^{ن} حيث: ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = ن س^{ن-١}$

إذا كانت ص = س فإن: $\frac{د ص}{د س} = ١$

إذا كانت ص = أ س^{ن} حيث: أ ، ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = أ ن س^{ن-١}$

مثال

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل ممايأتى:

أ ص = - ٣ ب ص = س^{٤} جـ ص = ٥س

د ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ هـ ص = $\sqrt[٧]{س^{٣}}$

الحل

أ ∵ ص = - ٣ ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٠$

ب ∵ ص = س^{٤} ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٤ س^{٣}$

جـ ∵ ص = ٥ س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥

د ∵ ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ = ٣ س$^{-٢}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - ٦ س$^{-٣}$

هـ ∵ ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{س}$ حيث س ⩾ ٠

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مماياتى:

أ ص = س^{٧} ب ص = س^{١٠} جـ ص = س$^{\frac{٣}{٢}}$ د ص = س$^{-٤}$

هـ ص = س$^{-\frac{٥}{٣}}$ و ص = $\frac{١}{س^{٥}}$ ز ص = $\sqrt[٨]{س^{٩}}$ ح ص = $\sqrt[٣]{س^{٧}}$

ط ص = ٣ س^{٦} ى ص = - ٢ س$^{-٥}$ ك ص = πس$^{-٤}$ ل ص = - ٤ $\sqrt[٣]{س}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ، فإن ع ± ق تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ويكون $\frac{د}{د س}$ (ع ± ق) = $\frac{د ع}{د س}$ ± $\frac{د ق}{د س}$ وبصفة عامة ، فإن :

إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، ، د$_{ن}$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$\frac{د}{د س}$ (د$_{١}$ ± د$_{٢}$ ± د$_{٣}$ ± ... ± د$_{ن}$)(س) = د$'_{١}$(س) ± د$'_{٢}$(س) ± د$'_{٣}$(س) ± ... ± د$'_{ن}$(س)

مثال

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مماياتى:

أ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$ ب ص = $\frac{\sqrt[٨]{س} - ٢ س}{\sqrt[٨]{س}}$

الحل

أ ∵ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ١٢ س^{٥} - ٩ س$^{-١٠}$

ب ∵ ص = $\frac{\sqrt[٨]{س} - ٢ س}{\sqrt[٨]{س}}$

= ١ - ٢ $\sqrt[٨]{س}$ = ١ - ٢ س$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٠ - ٢ × $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}-١}$ = - س$^{-\frac{١}{٢}}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ ص = ٣س^{٢} + ٥ ب ص = ٢ س^{٣} - ٤ س + ٧ جـ ص = ٣ س$^{-٤}$ + ٦ س$^{\frac{٢}{٣}}$

د ص = ٧ س^{٤} - $\frac{١}{٤س}$ هـ ص = ٣ س^{٨} - ٢ س$^{-٥}$ + ٨ و ص = $\frac{٥}{س}$ + س$\sqrt[٧]{س}$ + ٤ -

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت ع ، و دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن الدالة (ع . و) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون: $\frac{د}{د س}$ (ع . و) = ع $\frac{د و}{د س}$ + و . $\frac{د ع}{د س}$

مثال

(٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = - ١

الحل

∵ ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = (س^{٢} + ١) × ٣س^{٢} + (س^{٣} + ٣) × ٢ س

= ٣س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س^{٤} + ٦س

= ٥س^{٤} + ٣س^{٢} + ٦س

عند س = - ١ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ (- ١)^{٤} + ٣(- ١)^{٢} + ٦ (- ١) = ٢

حاول أن تحل

(٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان :

أ ص = (٢س +٣) (٣ س -١) ب ص = (٢ س + ٥) ^{٢}

جـ ص =$\sqrt{٨}$س ($\sqrt{٨}$س + ٤) د ص = ($\sqrt{٨}$س -١) ($\sqrt{٨}$س +١)

هـ ص = (٤س^{٢} - ١) (٧ س^{٣} + س) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كانت ع ، و دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت و (س) ≠ ٠

فإن الدالة($\frac{ع}{و}$) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{د}{د س}$ ($\frac{ع}{و}$) = $\frac{و \frac{د ع}{د س} - ع \frac{د و}{د س}}{ق^{٢}}$

أى ($\frac{ع}{و}$)$'$ = $\frac{و ع' - ع و'}{و^{٢}}$

مثال

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$

الحل

∵ ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(س^{٣} + ١) \times ٢س - (س^{٢} - ١) \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ س^{٤} + ٢س - ٣ س^{٤} + ٣ س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

= $\frac{- س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ) ص = $\frac{٢ س - ١}{س + ١}$ ب) ص = $\frac{٢ س + ٥}{١ - ٤س}$ ج) ص = $\frac{٢س^{٢} - ١}{س + ٥}$

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) (Chain rule)

نظرية

إذا كانت ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، وكانت ع = ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص = د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وتكون : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

لاحظ أن ص دالة الدالة س

تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

مثال

(٥) إذا كانت ص = $(س^{٢} - ٣س + ١)^{٥}$ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

الحل

بفرض ع = $س^{٢} - ٣ س + ١$ ∴ ص = $ع^{٥}$

ص قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع (كثيرة حدود فى ع) ويكون $\frac{د ص}{د ع} = ٥ ع^{٤}$

ع قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س (كثيرة حدود فى س) ويكون $\frac{د ع}{د س} = ٢ س - ٣$ ،

بتطبيق قاعدة السلسلة ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = ٥ ع^{٢} \times (٢س - ٣)$ ،

بالتعويض عن ع ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٥ (س^{٢} - ٣ س + ١)^{٤} \times (٢ س - ٣)$

حاول أن تحل

(٥) إذا كانت ص = $(٢ س + ٣)^{٥}$ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

مشتقة الدالة $[د(س)]^{ن}$

إذا كانت ع = $[د(س)]^{ن}$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى ،

فإن: $\frac{د ع}{د س} = ن [د(س)]^{ن - ١} \times د'(س)$

مثال

٦ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان

أ ص = $(٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠}$ ب ص = $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٥}$

الحل

أ ص = $(٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ١٠ (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩} \times \frac{د}{د س}(٦س^{٣} + ٣س + ١) = ١٠ (١٨ س^{٢} + ٣) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}$

$= ٣٠ (٦ س^{٢} + ١) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}$

ب ص = $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٥}$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = ٥ (\frac{س - ١}{س + ١})^{٤} \times \frac{(س + ١) \times ١ - (س - ١) \times ١}{(س + ١)^{٢}}$

$= ٥ (\frac{س - ١}{س + ١})^{٤} \times \frac{س + ١ - س + ١}{(س + ١)^{٢}}$

$= \frac{١٠}{(س + ١)^{٢}} \times (\frac{س - ١}{س + ١})^{٤} = \frac{١٠(س - ١)^{٤}}{(س + ١)^{٦}}$

حاول أن تحل

٦ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت أ ص = $(٢س^{٣} - ٤س + ١)^{٩}$ ب ص = $(\frac{٥س^{٢}}{٣س^{٢} + ٢})^{٣}$

مثال

٧ إذا كان د(س) = $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ - $٢س^{٢}$ + ٥س - ٤ أوجد قيم س التي تجعل د`(س) = ٢

الحل

د`(س) = $\frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} - ٢ \times ٢ س + ٥ \times ١$

= $س^{٢}$ - ٤ س + ٥

عندما د`(س) = ٢ $\therefore س^{٢}$ - ٤س + ٥ = ٢ ويكون $س^{٢}$ - ٤ س + ٣ = ٠

∵ (س - ١) (س - ٣) = ٠ $\therefore$ س = ١ أو س = ٣

حاول أن تحل

٧ أوجد قيم س التى تجعل د`(س) = ٧ فى كل ممايأتى:

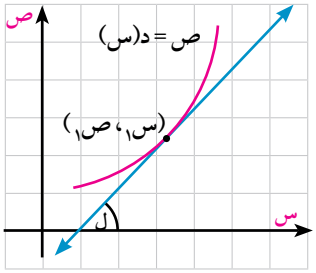
أ د(س) = $س^{٣}$ - ٥ س + ٢ ب د(س) = $(س - ٥)^{٧}$

تفكير ناقد: أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت :

ص = (س - ١) (س + ١) $(س^{٢} + ١)$ $(س^{٤} + ١)$ $(س^{٨} + ١)$ $(س^{١٦} + ١)$

تطبيقات هندسية على المشتقة

Geometric Applications on the Derivative



فى التفسير الهندسى للمشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د(س) وجدنا أن ميل المماس م عند النقطة (س١، ص١) يساوى المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة .

أى أن $م = \frac{ء ص}{ء س}$ عند النقطة (س١، ص١) ويمكن كتابته على الصورة

$$م = [\frac{ء ص}{ء س}]_{(س_١، ص_١)}$$

وإذا كان ل قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **فإن:**

$$م = ظا\ ل = [\frac{ء ص}{ء س}]_{(س_١، ص_١)}$$

لاحظ أن:

١ إذا كان م١، م٢ ميلى مستقيمين معلومين ل١، ل٢ فإن :

ل١ // ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ = م٢ (شرط التوازى)

ل١ ⊥ ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ م٢ = -١ (شرط التعامد)

٢ يسمى ميل المماس عند أى نقطة على منحنى بميل المنحنى عند هذه النقطة كما يسمى العمودى على المماس لمنحنى عند نقطة التماس بالعمودى للمنحنى عند هذه النقطة .

$$\therefore \text{ميل العمودى عند النقطة } (س_١، ص_١) = \frac{-١}{[\frac{ء ص}{ء س}]_{(س_١، ص_١)}}$$

مثال

(٨) أوجد كل من ميل المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢س^{٣} - ٤س + ٥ عند النقطة (-٢، -٣) الواقعة عليه.

الحل

$\therefore$ ص = ٢س^{٣} - ٤ س + ٥

$\therefore$ ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦س^{٢} - ٤

عند النقطة (-٢ ، -٣)

ميل المماس = $[\frac{ء ص}{ء س}]_{(-٢، -٣)}$ = ٦ (-٢)^{٢} - ٤ = ٢٠

ميل العمودى = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{٢٠}$

حاول أن تحل

(٨) أوجد ميل كل من المماس والعمودى للمنحنيات الآتية عند النقط المبينة:

أ ص = س - ٧ عندما س = -١

ب ص = س + $\frac{١}{س}$ عندما س = ٤

ج ص = $\frac{٥}{س-٣}$ عندما س = ٢

د ص = (س^{٣} - ٢) (س +١) عندما س = ١

مثال

(٩) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} - ٦س + ٥ والتى عندها :

(أ) ميل المماس = ٢ (ب) المماس يوازى محور السينات

(جـ) المماس عمودى على المستقيم ٤ ص + س -١ = صفر

الحل

∵ ص = س^{٢} - ٦س + ٥

∴ ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س -٦

(أ) ∵ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ = ٢ س - ٦ ∴ ٢س = ٨ أى أن س = ٤

ويكون ص = (٤)^{٢} - ٦ (٤) + ٥ = -٣

ميل المماس = ٢ عند النقطة (٤، -٣)

(ب) ∵ المماس // محور السينات ∴ ميل المماس = ميل محور السينات = صفر

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س - ٦ = ٠ ∴ س = ٣ ، ص = ٩ - ١٨ + ٥ = -٤

المماس يوازى محور السينات عند النقطة (٣، -٤)

(جـ) المماس عمودى على المستقيم ٤ ص +س -١= ٠ الذى ميله $\frac{-١}{٤}$

ميل المماس = -١ ÷ $\frac{-١}{٤}$ = ٤

٢ س - ٦ = ٤ ∴ س = ٥، ص = صفر

∴ المماس يكون عموديًا على المستقيم ٤ ص + س -١ = ٠ عند النقطة (٥، ٠)

تذكر أن

ميل المستقيم
أ س + ب ص + جـ = ٠
يساوى $\frac{-أ}{ب}$

حاول أن تحل

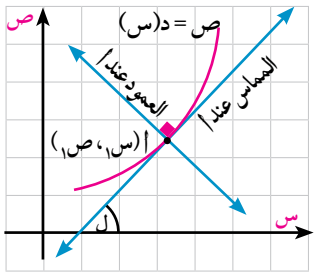
(٩) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٣} - ٣س^{٢} ويكون عندها المماس للمنحنى :

(أ) موازيًا محور السينات (ب) عمودى على المستقيم س + ٩ ص + ٣ = ٠

تعلم

معادلة المماس لمنحنى *Equation of the Tangent to a Curve*

إذا كانت (س$_{١}$، ص$_{١}$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س)،
م ميل المماس عند هذه النقطة فإن:
معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هى



ص - ص$_{١}$ = م(س - س$_{١}$)

ملاحظة: معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هى :

ص - ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س - س$_{١}$)

مثال

(١٠) أوجد معادلتا المماس والعمودى لمنحنى ص = ٢س^{٢} - ٥س +١ عند النقطة الواقعة عليه و إحداثيها السينى = ٢

الحل

∵ النقطة تقع على المنحنى ∴ فهى تحقق معادلته

عند س = ٢ فإن ص = ٢ (٢)^{٢} - ٥(٢) + ١ = -١ ∴ النقطة هى (٢، -١)

∵ $\frac{د ص}{د س}$ = ٤س - ٥ ∴ ($\frac{د ص}{د س}$)$_{س=٢}$ = ٤ × ٢ - ٥ = ٣

أى أن عند النقطة (٢، -١) ميل المماس = ٣ ويكون ميل العمودى = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة المماس هى ، معادلة العمودى هى

ص - (-١) = ٣(س-٢) ص - (-١) = $\frac{-١}{٣}$ (س -٢)

ص + ١ = ٣س - ٦ ٣ ص + ٣ = - س + ٢

ص - ٣ س + ٧ = ٠ ٣ ص + س + ١ = صفر

حاول أن تحل

(١٠) أوجد معادلتا المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها:

أ ص = س^{٣} +س^{٢} -١ ، س = -٢ ب ص = (٣س -٥)^{٧} ، س =٢

مثال

(١١) إذا كان المنحنى ص = أس^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨س + ٥ عند النقطة (-١، -٣) فأوجد قيمتى أ ، ب.

الحل

∵ النقطة (-١ ، -٣) تقع على المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

∴ -٣ = أ(-١)^{٣} + ب(-١)^{٢} أى أ-ب = ٣ (١)

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه = $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

∵ المستقيم ص = ٨س + ٥ مماس للمنحنى عند النقطة (-١، -٣)

∴ [$\frac{د ص}{د س}$]$_{(-١، -٣)}$ = ميل المستقيم = ٨

∴ ٣ أ (-١)^{٢} + ٢ ب(-١) = ٨ أى ٣ أ - ٢ ب = ٨ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) **نجد أن:**

أ = ٢ ، ب = -١

حاول أن تحل

(١١) أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب عند النقطة (١، ٣) الواقعة عليه تساوى ٥

تمـــاريـن (٣-٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) معدل تغير $س^{٣} + ٤$ بالنسبة إلى س عندما س = ٢ يساوى

أ) ٤ ب) ٨ ج) $\frac{١}{٤}$ د) ١٢

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = ٣س - $س^{٣}$ عند س = صفر يساوى

أ) ٣ ب) صفر ج) - ٣ د) ٦

(٣) المماس للمنحنى ص = $س^{٢}$ - ٨س + ٢ يوازى محور السينات عند س = :

أ) -٨ ب) ٢ ج) ٤ د) صفر

(٤) المستقيم س + ص = ٥ يمس المنحنى ص = ٣$س^{٢}$ + ٥س + ١ عند س =

أ) ١ ب) ٥ ج) ٣ د) -١

أكمل كلاً مما يأتى:

(٥) $\frac{ء}{ء س}$ (٢س) = ...

(٦) $\frac{ء}{ء س}$ (٣$س^{٢}$ + ١) = ...

(٧) $\frac{ء}{ء س}$ ($س^{٤}$ - ٢$س^{٢}$ + ١)

(٨) $\frac{ء}{ء س}$ (س + $\sqrt{٨}$ س)

(٩) $\frac{ء}{ء س}$ ($\frac{١}{س^{٣}}$) = ...

(١٠) $\frac{ء}{ء س}$ (π ٥) = ...

(١١) $\frac{ء}{ء س}$ ($س^{\frac{١}{٢}}$) = ...

(١٢) $\frac{ء}{ء س}$ ($\frac{١}{\sqrt[٣]{٨}\ س}$) = ...

(١٣) $\frac{ء}{ء س}$ (٥$س^{٢}$ + ٣س + ٢) = ...

(١٤) $\frac{ء}{ء س}$ ($\sqrt{٨}$ ٢ $س^{٧}$ - $\frac{س^{٥}}{٥}$ + π) = ...

(١٥) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من :

أ) ص = ٣$س^{٥}$ ب) ص = $\frac{٣}{٤}$ $س^{-٨}$ ج) ص = $\frac{٣}{٢س^{٢}}$ د) ص = ٤$\sqrt{٨}$ س

هـ) ص = $\sqrt[٣]{٨}\ س^{٥}$ و) ص = $\frac{٢}{\sqrt{٨}\ س}$ ز) ص = $\frac{س^{٢}}{\sqrt{٨}\ س}$ ح) ص = س$\sqrt{٨}$ س

أوجد المشتقة الأولى بالنسبة إلى س لكل مما يأتى.

(١٦) ص = $س^{٣}$ + ٣$س^{٢}$ - ٥

(١٧) ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٤}$ - $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ + ٧ س - ٩

(١٨) ص = ٢$س^{٦}$ + ٣$\sqrt{٨}$ س

(١٩) ص = $\frac{٤س^{٢} - ٣س + ٢\sqrt{٨}\ س}{س}$

(٢٠) ص = س (٣$س^{٢}$ - $\sqrt{٨}$ س)

(٢١) ص = $\frac{٤س^{٢} - س + ٣}{\sqrt{٨}\ س}$

(٢٢) ص = ($س^{٢}$ + ١) (٢س + ٥)

(٢٣) ص = ($س^{٢}$ - ٧) (٢س + ٣)

(٢٤) ص = $(س^{٢} + ٣)(س^{٣} - ٣س + ١)$

(٢٥) ص = $(س^{٢} - \sqrt[٨]{س})(س^{٢} + ٢\sqrt[٨]{س})$

(٢٦) ص = $\frac{٥س - ٢}{٥س + ١}$

(٢٧) ص = $\frac{س - ٢}{س + ٥}$

(٢٨) أوجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقط المبينة فى كل ممايأتى:

أ ص = $(س^{٢} - ٢)^{٧}$ عند س= ٠

ب ص = $(س^{٢} - س + ١)^{-٤}$ عند س =١

(٢٩) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ ص = $(س + ٣)^{٧}$

ب ص = $(٢س^{٢} - ٣)^{٤}$

ج ص = $(س^{٣} + س - ١)^{٥}$

د $ص^{٣} = ٣س^{٢} + ١$

هـ ص = $\sqrt[٣]{(٢س^{٣} - ٤س + ٧)^{٢}}$

و ص = $ع^{٢}$ ، ع = $٣س^{٢} + ٢$

(٣٠) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $س^{٢} + \frac{١}{س} - ١$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١.

(٣١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^{٣} - ٦س^{٢} - ١٥س + ٢٠$ والتي يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات.

(٣٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^{٣} - ٩س^{٢} - ١٦س + ١$ والتى يكون ميل المنحنى عندها يساوى ٥

(٣٣) أوجد معادلتا المماس والعمودى للمنحنى ص = $٣س^{٢} - ٧س + ٢$ عند النقط (٢، ٠) الواقعة عليه.

(٣٤) أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها والمبين احداثيها السينى أمام كل منها:

أ ص = $(س + ٣)^{٣}$ ، س = -١

ب ص = $\frac{٣}{س - ٢}$ ، س = ٤

ج ص = $\sqrt{س + ٧}$ ، س = ٢

د ص = $(س - ٥)(س + ٥)$ ، س = -٣

(٣٥) أوجد قيمتى أ ، ب إذا علم أن المستقيم ٥ س - ص - ٦ = ٠ يمس المنحنى ص = $أ س^{٣} + ب$ س عند النقطة (١، -١)

التكامل

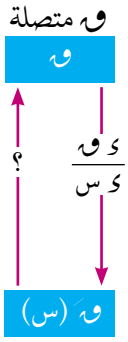
Integration

سوف تتعلم
- المشتقة العكسية للدالة
- التكامل الغير محدد
- تكامل بعض الدول الجبرية

المصطلحات الأساسية
- المشتقة العكسية *Antiderivative*
- تكامل *Integraation*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

استكشف



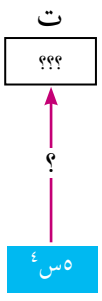
من دراستك للاشتقاق تعلم أن:

مشتقة الدالة ق حيث ق(س) = س^{٣} + ث ، ث عدد حقيقي ثابت

هى ق/(س) = ٣س^{٢}. أى أن ق/(س) = $\frac{ء}{ء س}$ ق(س)

فى هذه الحالة تسمى الدالة ق بالدالة الأصلية للدالة قَ

سوف نتناول فى هذا الدرس عملية عكسية لعملية الاشتقاق بمعنى أن إذا عُلِمَت المشتقة قَ **فكيف نحصل على الدالة الأصلية؟**



لإيجاد دالة أصلية مشتقتها بالنسبة إلى س هى ٥س^{٤}

نفرض د(س) = ٥س^{٤}

ولنبدأ بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

ن س$^{ن-١}$ = ٥س^{٤} ∴ ن - ١ = ٤ ، ن = ٥

فيكون ت(س) = س^{٥} أو س^{٥} + ٣ أو س^{٥} - ٢

تسمى الدالة ت دالة المشتقة العكسية أو الدالة الاصلية للدالة د

هل تستطيع اكتشاف المشتقة العكسية ت للدالة د إذا كانت:

أ) د(س) = ٢ س

ب) د(س) = ٧س^{٦}

تعلم

المشتقة العكسية

Antiderivative

إذا كانت ص = س^{٢}

فإن المشتقة الأولى هى $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ س

أما استنتاج الدالة ص من الدالة المشتقة $\frac{ء ص}{ء س}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية.

فمثلا س^{٢} هى مشتقة عكسية للدالة ٢س لاحظ أن ٢س لها العديد من المشتقات العكسية منها س^{٢} + ١ ، س^{٢} + ٢ ، س^{٢} - ٣ ، جميعها مشتقتها ٢ س ولا تختلف إلا فى الثابت ث .

∴ $\frac{ء}{ء س}$ (س^{٢} + ث) = ٢ س حيث (ث) مقدار ثابت .

تعريف يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت`(س) = د(س) لكل س فى مجال د.

مثال

(١) أثبت أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س^{٣}.

الحل

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون ت` (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤س^{٣} = ٢ س^{٣}

∴ ت` (س) = د(س) أى أن الدالة(ت) مشتقة عكسية للدالة د

حاول أن تحل

(١) بين أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{٥}

تفكير ناقد :

ما العلاقة بين ت$_{١}$، ت$_{٢}$ إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة د؟

التكامل غير المحدد *Indefinite Integral*

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س) ﻫ س

[ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف إذا كان ت`(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ﻫ س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل).

لاحظ أن :

$\frac{ﻫ}{ﻫ س}$ (س^{٣} + ث) = ٣س^{٢} ∴ $\int$ ٣ س^{٢} ﻫس = س^{٣} + ث

$\frac{ﻫ}{ﻫ س}$ (٢س^{٧}) = ١٤س^{٦} ∴ $\int$ ١٤ س^{٦} ﻫس = ٢س^{٧} + ث

ولتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

(٢) **تحقق من صحة كل مايأتى:**

أ $\int$ ٧س^{٧} ﻫ س = $\frac{١}{٨}$ س^{٨} + ث

ب $\int$ (٧س^{٦} + $\frac{٤}{س^{٣}}$) ﻫس = س^{٧} - $\frac{٢}{س^{٢}}$ + ث

الحل

أ ∵ $\frac{د}{د س}\left(\frac{١}{٨} س^{٨} + ث\right) = س^{٧}$ ∴ $\int س^{٧}\, د س = \frac{١}{٨} س^{٨} + ث$

ب ∵ $\frac{د}{د س}\left(س^{٧} - \frac{٢}{س^{٣}} + ث\right) = \frac{د}{د س}\left(س^{٧} - ٢ س^{-٢} + ث\right)$

$= ٧ س^{٦} - ٢ (-٢) س^{-٣} = ٧ س^{٦} + \frac{٤}{س^{٣}}$

∴ $\int \left(٧ س^{٦} + \frac{٤}{س^{٣}}\right) د س = س^{٧} - \frac{٢}{س^{٢}} + ث$

حاول أن تحل

(٢) **تحقق من صحة كل ممايأتى:**

أ $\int س^{-٤}\, د س = \frac{-١}{٣} س^{-٣} + ث$ ب $\int س \sqrt{١ + س^{٢}}\, د س = \frac{١}{٣}(١ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

مثال

(٣) باستخدام التعريف المباشر للتكامل أوجد المشتقة العكسية للدالة د حيث :

أ د(س) = ٥س^{٤} ب د(س) = ١٨ س^{٥} جـ د(س) = -٣ س$^{-٤}$

الحل

أ ت (س) = $\int ٥ س^{٤}\, د س = س^{٥} + ث$

ب ت (س) = $\int ١٨ س^{٥}\, د س = \int ٣(٦ س^{٥})\, د س = ٣ س^{٦} + ث$

جـ ت (س) = $\int -٣ س^{-٤}\, د س = س^{-٣} + ث$

حاول أن تحل

(٣) باستخدام تعريف التكامل أوجد المشتقة العكسية لكل من : ٢٠س^{٤}، -٥س$^{-٤}$

يتطلب إيجاد المشتقات العكسية للدوال باستخدام التعريف السابق كثيرًا من الوقت والجهد؛ لذلك تستخدم بعض الصور القياسية البسيطة للتكامل (قواعد التكامل) والتى تيسر عملية إيجاد المشتقات العكسية .

قاعدة (١) :

$\int س^{ن}\, د س = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + ث$ حيث ث **ثابت** ، ن **عدد نسبى** ، ن $\neq$ -١

مثال

أوجد:

(٤) أ $\int س^{٥}\, د س$ ب $\int س^{-٣}\, د س$ جـ $\int س^{\frac{٢}{٥}}\, د س$ د $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\, د س$

الحل

أ $\int س^{٥} \, د س = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ث = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

ب $\int س^{-٣} \, د س = \frac{س^{-٣+١}}{-٢} + ث = -\frac{١}{٢} س^{-٢} + ث$

جـ $\int س^{\frac{٢}{٥}} \, د س = \frac{١}{\frac{٧}{٥}} س^{\frac{٢}{٥}+١} + ث$

$= \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + ث$

د $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}} \, د س = \int س^{-\frac{٣}{٥}} \, د س$

$= \frac{١}{\frac{٢}{٥}} س^{\frac{٣}{٥}+١} + ث = \frac{٥}{٢} س^{\frac{٢}{٥}} + ث$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ $\int س^{٨} \, د س$ ب $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, د س$ جـ $\int س^{\frac{٧}{٩}} \, د س$ د $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} \, د س$

قاعدة (٢) :

$\int ا \, د(س) \, د س = ا \int د(س) \, د س$ حيث ا عدد حقيقي ثابت

مثال

٥ أ $\int ٣س^{٤} \, د س = ٣ \int س^{٤} \, د س = ٣ \times \frac{١}{٤} س^{٤} + ث = \frac{٣}{٤} س^{٤} + ث$

ب $\int ٨س^{-٥} \, د س = ٨ \int س^{-٥} \, د س = ٨ \times \frac{١}{-٤} س^{-٤} + ث = -٢ س^{-٤} + ث$

نتيجة

$\int ا \, د س = ا س + ث$

لذلك فإن:

$\int ٥ \, د س = ٥ س + ث$ ، $\int -٩ \, د ن = -٩ ن + ث$

$\int د س = س + ث$ ، $\int \sqrt{٧} \, د ع = \sqrt{٧} ع + ث$

حاول أن تحل

٥ أوجد كلاً من :

أ $\int ٣س^{٤} \, د س$ ب $\int -٢ ع \, د ع$ جـ $\int -س \, د س$ د $\int -\frac{د س}{٥}$

قاعدة (٣) :

$$\int [د(س) \pm ر(س)] \, ى س = \int د(س) \, ى س \pm \int ر(س) \, ى س$$

مثال

٦ أوجد: أ $\int (٤س + ٣س^{٢}) \, ى س$ ب $\int \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س + ٢} \, ى س$

الحل

أ $\int (٤س + ٣س^{٢}) \, ى س$

$= \int ٤س \, ى س + \int ٣س^{٢} \, ى س$

$= ٤ \int س \, ى س + ٣ \int س^{٢} \, ى س$

$= \frac{٤}{٢} س^{٢} + ٣ \times \frac{١}{٣} س^{٣} + ث$

$= ٢س^{٢} + س^{٣} + ث$

ب $\int \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س + ٢} \, ى س$

$= \int \frac{(س - ٤)(س + ٢)}{س + ٢} \, ى س$

$= \int (س - ٤) \, ى س$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤س + ث$

حاول أن تحل

٦ أوجد:

أ $\int (٣س^{٢} + ٢س - ١) \, ى س$ ب $\int (\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ٣) \, ى س$

جـ $\int ٢س (س + ٣) \, ى س$ د $\int \frac{٤س^{٢} - ٩}{٢س - ٣} \, ى س$

قاعدة (٤) :

$$\int (أس + ب)^{ن} \, ى س = \frac{١}{أ(ن + ١)} (أس + ب)^{ن+١} + ث \, ، \, ن \neq -١$$

تفكير ناقد:

١- هل يمكنك التحقق من صحة العلاقة السابقة عن طريق تعريف المشتقة العكسية؟ وضح ذلك.

مثال

٧ أوجد:

أ $\int (٣ - ٢س)^{٥} \, ى س$ ب $\int (٢س - ٧)^{-٣} \, ى س$

جـ $\int \frac{٧}{\sqrt[٣]{٤ - ٣س}} \, ى س \, ، \, س < \frac{٤}{٣}$

الحل

أ $\int (٣س - ٢)^{٥} \, د س = \frac{١}{(١ + ٥)٣} (٣س - ٢)^{١+٥} + ث = \frac{١}{١٨} (٣ س - ٢)^{٦} + ث$

ب $\int (٢س - ٧)^{-٣} \, د س = \frac{١}{(١ + ٣-)٢} (٢س - ٧)^{-٣+١} + ث = -\frac{١}{٤} (٢ س - ٧)^{-٢} + ث$

جـ $\int \frac{٧}{\sqrt[٣]{(٤ - ٣س)^{٨}}} \, د س = ٧ \int (٤ - ٣س)^{-\frac{١}{٣}} \, د س = \frac{٧}{٣ (-\frac{١}{٣}+١)} (٤ - ٣س)^{-\frac{١}{٣}+١} + ث$

$= \frac{٧}{٣ (-\frac{١}{٣}+١)} (٤ - ٣س)^{\frac{١}{٣}} = \frac{١٤}{٣} \sqrt[٣]{(٤ - ٣س)^{٨}} + ث$

حاول أن تحل

٧ أوجد: أ $\int ٩(٤ - ٣س)^{٢} \, د س$ ب $\int \frac{١٥}{(٥ - ٣س)^{٦}} \, د س$

تمـــارين (٣-٤)

أوجد:

١ $\int أس^{٢} \, د س$ ٢ $\int س^{٧} \, د س$ ٣ $\int ٨س \, د س$

٤ $\int -٤ س^{٣} \, د س$ ٥ $\int ٩س^{٨} \, د س$ ٦ $\int ١٢ س^{-٤} \, د س$

٧ $\int ٥ \, د س$ ٨ $\int (٥ \sqrt[٣]{س}) \, د س$ ٩ $\int -٣س^{٧} \, د س$

١٠ $\int -\frac{٨}{٥} س^{-٣} \, د س$ ١١ $\int \frac{٧}{٣} ن^{٦} \, د ن$ ١٢ $\int \frac{١٢}{٥} ف^{٥} \, د ف$

١٣ $\int (س + ١) \, د س$ ١٤ $\int (٥ - ٢ن) \, د ن$ ١٥ $\int (ن^{٣} - ٦ن^{٤}) \, د ن$

١٦ $\int (س^{٣} + س^{٢} + س) \, د س$ ١٧ $\int ٢(٣س^{٢} + ٧) \, د س$ ١٨ $\int (أس^{٢} - ب س + جـ) \, د س$

١٩ $\int أس(س + ٣) \, د س$ ٢٠ $\int ٧أس^{٢} (س^{٤} - ١) \, د س$ ٢١ $\int (س - ١)(س + ١) \, د س$

٢٢ $\int (س - ٢) (٢ - س) \, د س$ ٢٣ $\int (٢ س + ٣)(س - ١) \, د س$ ٢٤ $\int أس^{٢} (٢س + \frac{١}{س}) \, د س$

٢٥ $\int \frac{٣س^{٢} - ٤س}{س} \, د س$ ٢٦ $\int \frac{س^{٧} + ٥س^{٦} - س^{٣}}{س^{٣}} \, د س$ ٢٧ $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} \, د س$

٢٨ $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, د س$ ٢٩ $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢س + ٤} \, د س$ ٣٠ $\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣} \, د س$

٣١ $\int (س + ٤)^{٣} \, د س$ ٣٢ $\int ٧(٢س - ٧)^{٦} \, د س$ ٣٣ $\int (٨ - ٣ن)^{٤} \, د ن$

٣٤ $\int ٦(س - ٣)^{-٤} \, د س$ ٣٥ $\int (٢س - ٣)^{\frac{٧}{٣}} \, د س$ ٣٦ $\int ١٥ \sqrt[٥]{(٣ س - ٢)^{٢}} \, د س$

ملخص الوحدة

دالة التغير - معدل التغير

- إذا كانت ص = د(س) وتغيرت س من س إلى س + هـ فإن دالة التغير ت(هـ) = د(س + هـ) - د(س)
- دالة متوسط التغير م(هـ) = $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$
- دالة معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$
- يطلق على معدل التغير المشتقة الأولى للدالة ونرمز لها بالرمز د`(س) حيث :

د`(س) = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ [ و يرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز : $\frac{ى ص}{ى س}$ أو ص` أو د` (س)]

قابلية الاشتقاق:

- تكون د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا وفقط إذا كان: د`(أ) = $\lim_{س \to أ}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود.

بعض قواعد الاشتقاق:

الدالة د(س)	مشتقة الدالة د` (س)
١- أ حيث أ ثابت	صفر
٢- س^{ن} حيث ن ∈ ع	ن س$^{ن-١}$
٣- أ س^{ن} حيث أ ثابت ، ن ∈ ع	أ ن س$^{ن-١}$
٤- ر (س) ± ق (س) ± ... ك(س)	ر` (س) ± ق` (س) ± ... ك`(س)
٥- ر(س) . ق (س) حيث ر، ق قابلتان للاشتقاق	ر(س) × ق` (س) + ق(س) × ر`(س)
٦- $\frac{ر(س)}{ق(س)}$ حيث ر ، ق قابلتان للاشتقاق ، ق(س) ≠ ٠	$\frac{ق(س) \times ر`(س) - ر(س) \times ق`(س)}{(ق(س))^{٢}}$
٧- إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(س)	$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ى ص}{ى ع} \times \frac{ى ع}{ى س}$
إذا كانت ص = د(ر(س))	د`(ر(س)) × ر` (س)

تطبيقات هندسية:

١- إذا كانت ص = د(س) فإن ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه = $\frac{ى ص}{ى س}$.

٢- إذا كانت (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة على منحنى الدالة ص = د(س) فإن معادلة المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هى :

ص - ص$_{١}$ = م (س -س$_{١}$) حيث م = ($\frac{ى ص}{ى س}$) ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$).

و معادلة العمودى هى ص - ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س - س$_{١}$)

المشتقة العكسية للدالة:

- يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت تَ(س) = د(س) لكل س فى مجال د.
- إذا كان تَ(س) = د(س) فإن ∫ د(س) ﻫ س = ت (س) + ث حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل)

قواعد التكامل

١- ∫ س^{ن} ﻫ س = $\frac{١}{ن+١}$ س$^{ن+١}$ + ث حيث ث ثابت ، ن عدد نسبى ، ن ≠ -١

٢- ∫ أ د(س) ﻫ س = أ ∫ د(س) ﻫ س حيث أ عدد حقيقي ثابت

٣- ∫ [د(س) ± ر (س)] ﻫ س = ∫ د(س) ﻫ س ± ∫ ر (س) ﻫ س

٤- ∫ (أس + ب)^{ن} ﻫ س = $\frac{١}{أ(ن+١)}$ (أ س + ب)$^{ن+١}$ + ث ، ن ≠ -١

تمـــاريـن عامة

١ إذا كانت د(س) = ٥س - س^{٢} فأوجد دالة التغير ت عند س = س$_{١}$ ثم أوجد:
- أ دالة التغير ت(هـ) عند س$_{١}$ = ١
- ب مقدار التغير فى الدالة عندما تتغير س$_{١}$ من ٢ إلى ٢,٠١.
- ج مقدار التغير فى الدالة عندما تتغير س$_{١}$ من ١ إلى ٠,٩٨

٢ إذا كانت د(س)= س^{٢} - ٣س أوجد :
- أ دالة متوسط التغير م(هـ) عند س = ٢
- ب متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٠٣

٣ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عند س = $\sqrt{٣}$

٤ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث د(س) = س^{٢} -٢س +٣ ومن ذلك أوجد:
- أ متوسط التغير عندما تتغير س من -٢ إلى -١,٩
- ب معدل التغير لهذه الدالة عندما س = ٣

٥ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س}$ ، ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عندما س = ٤

٦ تتمدد صفيحة مربعة الشكل بحيث تظل محتفظة بشكلها، احسب معدل تغير مساحة سطح الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها = ٢٥ سم.

٧ صفيحة دائرية الشكل تمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ١٤ سم ، ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٨) مكعب يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله ، احسب معدل التغير فى حجم المكعب بالنسبة لطول حرفه عندما يكون طول حرفه = ٥سم.

(٩) مكعب يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله ، احسب متوسط التغير فى مساحة أوجه المكعب الكلية بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٦ إلى ٦,٣ سم ، ثم احسب معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه ٨سم.

(١٠) أوجد $\frac{د ص}{د س}$

أ) ص = $س^{٢} - ٣س$

ب) ص = $٥س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س + ٧$

جـ) ص = $٢س^{٤} - \frac{٥}{٣} س^{٣} + ٧س - ٥$

د) ص = $٢س^{٣} - \frac{٣}{س} - \frac{١}{س^{٢}} + ٥$

(١١) أوجد ميل المماس لمنحنى كل من الدوال الآتية:

أ) ص = $س^{٢} - ٢س + ٣$ عند النقطة (١، ٢)

ب) ص = $س^{٣} - ٢س + ١$ عند النقطة (-١ ، ٢)

جـ) ص = $س^{٣} + س^{٢} - س + ١$ عند النقطة (١ ، ٢)

د) ص = $س - \frac{١}{س}$ عند س = ١

(١٢) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لكل من المنحنيات الآتية :

أ) ص = $س^{٢} - ٣س + ٢$ عند (٢ ، ٠)

ب) ص = $س^{٣} - س^{٢} - ٤$ عند (١ ، -٤)

جـ) ص = (س- ١) (٢س + ١) عند النقطة (٠، -١)

د) ص = س(س - ١) (س + ٩) عند النقطة (٠ ، ٠)

(١٣) أوجد المشتقة الأولى لكل ممايأتى

أ) ص = $\frac{٣س - ٢}{٢س + ٣}$

ب) ص = $\frac{س^{٢} - ٥}{س^{٢} + ١}$

(١٤) أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{س}{س + ٢}$ عند النقطة (-١، -١) الواقعة عليه.

(١٥) أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{س^{٢} + س + ١}{س^{٢} + ١}$ عند س = ١

(١٦) أوجد $\frac{د ص}{د س}$:

أ) ص = $ع^{٣}$ ، ع = ٢س + ١

ب) ص = $ع^{٥}$ ، ع = $س^{٣} + ١$

جـ) ص = $ع^{٤}$ ، ع = $٣س^{٢} - س + ٢$

د) ص = $ع^{٤}$ ، ع = $٢س^{٣} + ٥$

أوجد التكاملات الآتية:

(١٧) $\int (س^{٢} - ٣س - ١)$ د س

(١٨) $\int (\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})$ د س

(١٩) $\int (س - ٢)(س + ٢)$ د س

(٢٠) $\int (س - ٥)(س + ١)$ د س

(٢١) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ د س

(٢٢) $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ د س

(٢٣) $\int ٦(س - ٢)^{٥}$ د س

(٢٤) $\int ٣(س + ٣)^{-٤}$ د س

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان متوسط معدل التغير فى د = ٣,٢ عندما تتغير س من ٧ إلى ٧,٢ فإن التغير فى د = ...

أ) -٦,٤ ب) ٦,٤ ج) ١,٦ د) -١,٦

(٢) $\frac{ك}{ك س}$ (٢ - ٣س)$^{-٢}$ ك س

أ) ١٢ س$^{-٢}$ - ٢٧ س$^{-٤}$ ب) $\frac{١}{٣}$ (٢ - ٣س)$^{-١}$ ج) ٦ (٢ - ٣س)$^{-٣}$ د) - ٢ (٢ - ٣س)$^{-٣}$

(٣) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س - ٣)° عند س = ٢ يساوى

أ) ١ ب) $\frac{١}{١٢}$ ج) ٥ د) ١٠

(٤) $\int$ (س^{٢} - ٣) ك س =

أ) ٢س ب) س^{٣} - ٣س ج) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س + ث د) ٢س - ٣ + ث

أجب عن مايأتى:

(٥) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

أ) ص = ٣س^{٢} - ٥ س + ٢ ب) ص = س (س^{٢} - ٣س + ٥)

ج) ص =(س -٢) (س +٢) د) ص = $\frac{س - ١}{س + ١}$

(٦) أوجد $\frac{ك ص}{ك س}$ فى كل مماياتى :

أ) ص = ع^{٢} ، ع = س^{٤} -٦ ب) ص = ٧ع^{٣} ، ع = $\frac{س + ١}{س - ١}$

(٧) أوجد :

أ) $\int$(٥س^{٤} - ٣س^{٢} +٣) ك س ب) $\int$ ٢س (س^{٢} +٣) ك س

ج) $\int$ (٢ س +٣)° ك س د) $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ ك س

(٨) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (س - ٢) (س + ١) عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

(٩) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} - ٦س^{٢} - ١٥س +٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات .

(١٠) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ -١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س =١



الوحدة الرابعة

الاحتمال

Probability

مقدمة الوحدة

تمتد جذور علم الاحتمال إلى عصر النهضة من خلال دراسة العلماء لعلم الفلك وألعاب الحظ ومحاولات فهم وتحليل ظهور عناصر من بين مجموعة كبيرة من العناصر الأخرى والتى قام بها جيرولامو كاردانو(Gerolamo Cardano) فى القرن السادس عشر، و بيير دي فيرما، (Pierr de Fermat)، وبليز باسكال (Blaise Pascal) واللذان عاشا خلال القرن السابع عشر.

وفى سياق تطور علم الاحتمال وتقدمه، وإنطلاقا من القرن التاسع عشر ظهرت تعاريف عدة للاحتمال، منها ما هو بسيط، ويعتمد على الإدراك الحسى، ومنها ما يعتمد على التجربة وفكرة التكرار النسبى للحدث المراد اختياره من خلال تكرار التجربة عددا كبيرا من المرات تحت شروط ثابته. فالاحتمال مقياس لإمكانية وقوع حادث (Event) معين

و انطلاقًا من القرن التاسع عشر اكتشفت نظرية الاحتمالات التى تعتبر المساعد الأكبر للعمل الإحصائى، ويعتبر العالم لبلاس(Laplace) أحد مؤسسيها، كذلك العالم أدولف كوتيليت (Adolph Quteelet) الذي قدم أول عمل احصائى بطريقة علمية سنة ١٨٥٣ وابتداءً من ذلك الوقت بدأ الإحصاء والاحتمال يبرز كعلم له فائدته، وقيمته الكبيرة فى مختلف المجالات، كذلك فى البحوث العلمية فى كافة المجالات ، بل تعدى ذلك إلى إعطاء حسابات صحيحة يعتمد عليها فى التنبؤ فى قضايا مستقبلية . وفى هذه الوحدة نتناول بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية فى الاحتمال وكيفية حسابه.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم التجربة العشوائية.
- يتعرف مفهوم فضاء العينة.
- يكتب فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية.
- يتعرف مفهوم الحدث – الحدث البسيط – الحدث المؤكد – الحدث المستحيل.
- يتعرف مفهوم الأحداث المتنافية.
- يتعرف العمليات على الأحداث مثل (الاتحاد – التقاطع – الفرق – الإكمال).
- يتعرف مفهوم الاحتمال.
- يستخدم مسلمات الاحتمال في حساب احتمال وقوع حد.
- يحل مسائل تطبيقية باستخدام مسلمات الاحتمال.
- يحل مشكلات حياتية باستخدام قوانين الاحتمال.

المصطلحات الأساسية

إحصاء	Statistics	حدث بسيط (أولى)	Simple Event
احتمال	Probability	حدث مركب	Compound Event
تجربة عشوائية	Random Experiment	حدث مؤكد	Certain Event
فضاء العينة – فضاء النواتج	Sample space	حدث مستحيل	Impossible Event
قطعة نقود	Coin	العمليات على الأحداث	Operation on the Events
حجر نرد	Die	أحداث متنافية	Mutually Exclusive Events
حدث	Event		

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): حساب الاحتمال.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية	Scientific calculator
آلة حاسبة رسومية	Graphical calculator
برامج رسومية للحاسوب	Graphical programs

مخطط تنظيمى للوحدة



٤-١ حساب الاحتمال

Calculating Probability

سوف تتعلم

- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- مفهوم الحدث – الحدث البسيط – الحدث المؤكد – الحدث المستحيل .
- العمليات على الأحداث: الاتحاد – التقاطع – الفرق – الإكمال.
- الأحداث المتنافية .
- قانونا دي مورجان.
- مفهوم الاحتمال
- حساب الاحتمال
- مسلمات الاحتمال وتطبيقات حياتية على الاحتمال

المصطلحات الأساسية

- تجربة عشوائية random experiment
- فضاء العينة sample space
- حدث event
- حدث بسيط simple event
- حدث مؤكد certain event
- حدث مستحيل impossible event
- أحداث متنافية mutually exclusive events
- الاحتمال probability
- مسلمات الاحتمال probability axioms

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة .

مقدمة :

سبق أن درست المفاهيم الأساسية للاحتمال بصورة مبسطة، وفى هذا الدرس سوف تستكمل دراسة هذه المفاهيم والعمليات على الأحداث فى حساب إحتمال وقوع حدث ما من خلال أمثلة وتطبيقات حياتية متنوعة.

مصطلحات ومفاهيم أساسية *Basic terms and concepts*

تعلم

التجربة العشوائية : Random Experiment

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

مثال

(١) بيِّن أيًّا من التجارب التالية تجربة عشوائية ؟

(أ) إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

(ب) سحبت كرة ملونة من كيس به مجموعة من الكرات الملونة(دون أن نعرف ألوانها) وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

(جـ) إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوى.

(د) سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة فى الحجم والوزن، الأولى بيضاء، الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

الحل

التجارب (أ) ، (جـ)، (د) هى تجارب عشوائية؛ لأنه يمكن معرفة جميع نواتج كل منها قبل إجرائها ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يقع عند إجراء التجربة.

بينما تجربة (ب) هى تجربة غير عشوائية؛ لأنه لايمكن تحديد ناتج التجربة قبل إجرائها.

حاول أن تحل

(١) بيِّن أيًّا من التجارب الآتية هى تجربة عشوائية :

أ إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.

ب سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.

ج سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة.

تعلم

تعريف

فضاء العينة (فضاء النواتج) : *Sample space (outcomes space)*

➢ فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز له بالرمز (ف)

ملاحظة:

➢ يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف) .

➢ يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا، أو غير منتهٍ إذا كان عدد عناصره غير محدود ، وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهي.

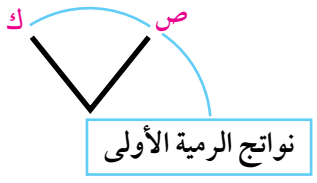
فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة :

أولاً : إلقاء قطعة نقود : *Tossing a coin*

١ - فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر هو: ف = { ص، ك}

حيث ص ترمز للصورة ، ك ترمز للكتابة

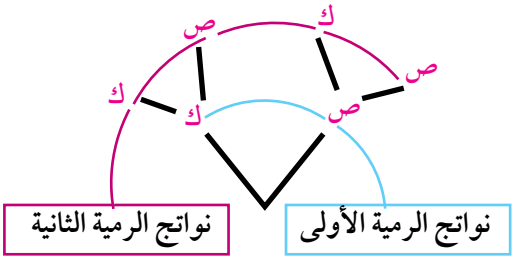
ويكون : ن(ف) = ٢



٢ - فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو:

ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

ويكون : ن (ف) = ٢ × ٢ = ٤ = $٢^{٢}$



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن الحصول عليه من الشجرة البيانية المقابلة هو:

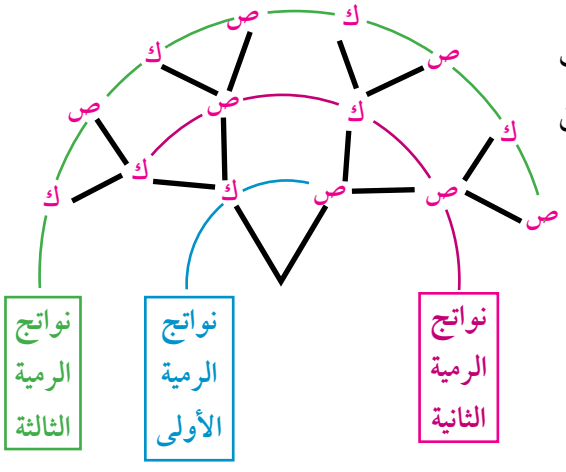
ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ،

(ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ،

(ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ،

(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

ويكون : ن(ف) = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ = $٢^{٣}$



لاحظ من الأمثلة السابقة

١ - عند رمى قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون ن (ف) = $٢^{م}$

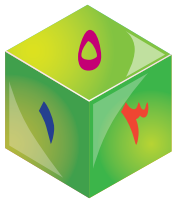
٢ - (ص، ك) ≠ (ك، ص) لماذا؟



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين فى الشكل أو الحجم) معًا هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين، ويكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب:
(وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية).

ثانيًا : إلقاء حجر نرد :

Tossing a die



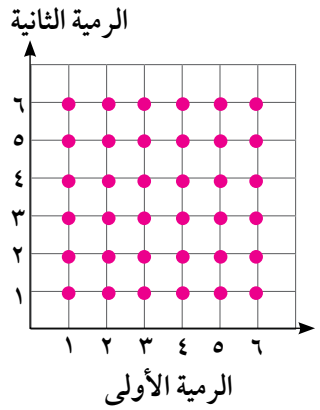
١- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى هو :
ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ويكون : ن (ف) = ٦

٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر فى كل مرة على الوجه العلوى هو مجموعة الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول هو ناتج الرمية الأولى، ومسقطها الثانى هو ناتج الرمية الثانية أى أن:
ف = { (س، ص) : س∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}، ص∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}} والأشكال التالية توضح ذلك .

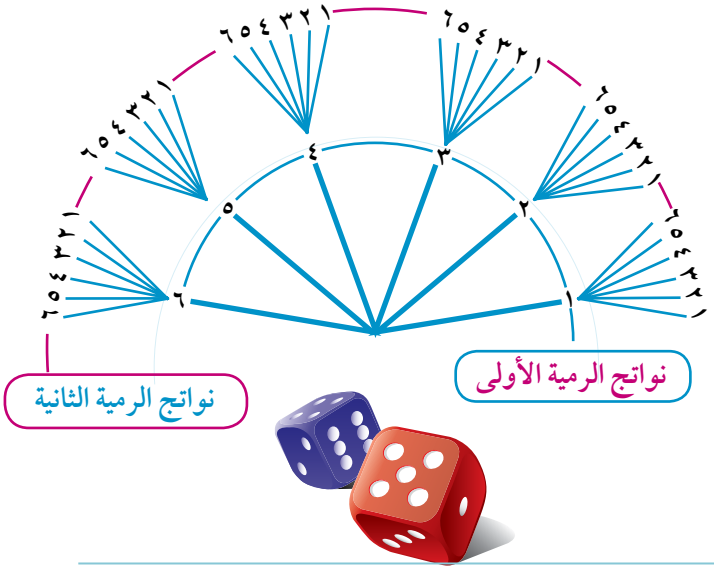
أ صورة جدولية :

الرمية الأولى / الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١،١)	(١،٢)	(١،٣)	(١،٤)	(١،٥)	(١،٦)
٢	(٢،١)	(٢،٢)	(٢،٣)	(٢،٤)	(٢،٥)	(٢،٦)
٣	(٣،١)	(٣،٢)	(٣،٣)	(٣،٤)	(٣،٥)	(٣،٦)
٤	(٤،١)	(٤،٢)	(٤،٣)	(٤،٤)	(٤،٥)	(٤،٦)
٥	(٥،١)	(٥،٢)	(٥،٣)	(٥،٤)	(٥،٥)	(٥،٦)
٦	(٦،١)	(٦،٢)	(٦،٣)	(٦،٤)	(٦،٥)	(٦،٦)

ب صورة هندسية :



ج الشجرة البيانية



لاحظ أن:

١- ن (ف) = ٦ × ٦ = ٣٦ = ٦^{٢}

٢- ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

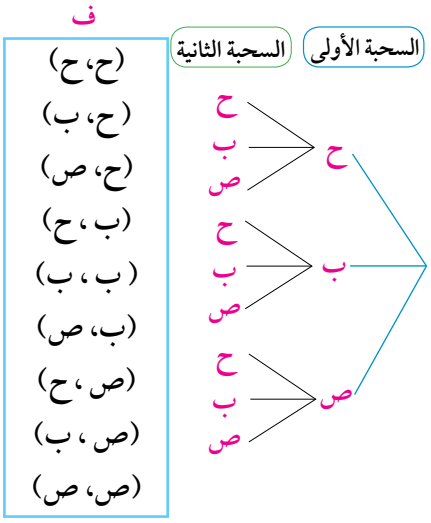
٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين فى آن واحد (معًا)، هو نفس فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد مرتين متتاليتين.

مثال

(٢) كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء، والثانية بيضاء، والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الآخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) وملاحظة تتابع الألوان.

الحل

نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة الصفراء بالرمز (ص):



أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور فى السحبة الثانية، ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية، ويوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث ن (ف) = $٣^{٢}$ = ٩

ف={(ح،ح)،(ح،ب)،(ح،ص)،(ب،ح)،(ب،ب)،(ب،ص)، (ص،ح)،(ص،ب)، (ص،ص)}

أضف إلى معلوماتك

إذا سحبت الكرة دون إحلال، فهذا يعنى عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها، وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها فى السحبة الثانية.

حاول أن تحل

(٢) صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سُحِبَت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة وبين عدد عناصره.

تعلم

تعريف

الحدث *The event*

- الحدث هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة .

تعريف

الحدث البسيط (الحدث الأولى) *The simple event*

- هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصرًا واحدًا فقط.

تعريف

الحدث المؤكد : *The certain event*

هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف

وهو حدث مؤكد الوقوع في كل مرة تجرى فيها التجربة

الحدث المستحيل *The impossible event*

هو الحدث الخالى من أى عنصر ويرمز له بالرمز ϕ

وهو حدث مستحيل أى يقع في أى مرة تجرى فيها التجربة

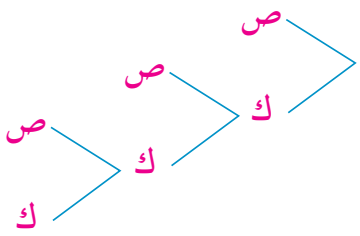
مثال

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات .
اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:

أ "حدث ظهور صورة على الأكثر"
ب "حدث ظهور صورة على الأقل"
ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"
د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

الحل

من الرسم نجد أن



ف = {ص ، (ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)،(ك ، ك ، ك)}
أ = {ص،(ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)،(ك ، ك ، ك)} = ف
ب = {ص،(ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)}
ج = {(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}
د = { } = {ϕ} الحدث المستحيل

حاول أن تحل

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.
اكتب فضاء النواتج ثم عين الأحداث الآتية:

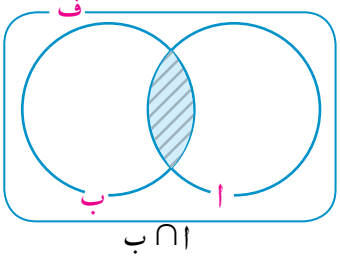
أ "حدث ظهور صورة على الأقل"
ب "حدث ظهور كتابتين على الأكثر"
ج "حدث ظهور كتابة على الأكثر"

العمليات على الأحداث *Operation of the events*

تعلم

أولاً: التقاطع *Intersection*

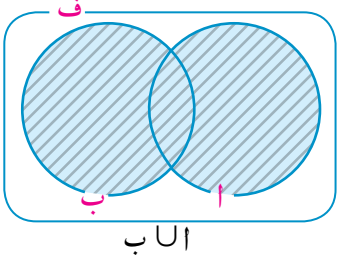
تقاطع الحدثين أ ، ب هو الحدث أ ∩ ب الذى يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ، ب معًا ويعنى وقوع أ و ب (وقوع الحدثين معًا)



ا ∩ ب

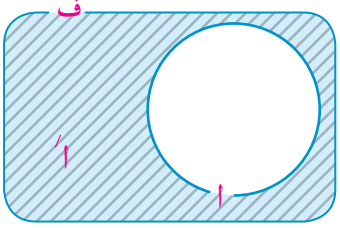
ثانيًا : الاتحاد: *Union*

اتحاد الحدثين أ، ب هو الحدث أ ∪ ب الذى يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ أو ب أو كليهما معًا ويعنى وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)



ا ∪ ب

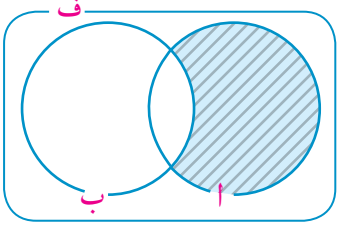
ثالثًا : الإكمال *Completion*



الحدث أَ يسمى الحدث المكمل للحدث أ ، لذلك أَ يحوى كل عناصر فضاء العينة التى لاتنتمى إلى الحدث أ ، ويعنى **عدم وقوع الحدث أ** .

لاحظ : أ ∪ أَ = ف ، أ ∩ أَ = ϕ

رابعًا: الفرق *Difference*



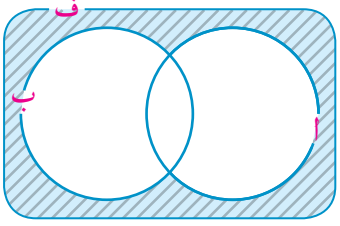
الحدث أ - ب يحوى كل عناصر الفضاء التى تنتمى إلى أ، ولا تنتمى إلى ب وهى أيضًا نفس عناصر أ ∩ بَ

ويعنى **وقوع أ وعدم وقوع ب (وقوع أ فقط)**

أ - ب = أ ∩ بَ = أ - (أ ∩ ب)

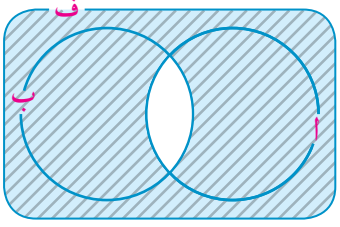
خامسًا: قانونا دى مورجان

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإن :



(أولًا) أَ ∩ بَ = (أ ∪ ب)َ

وتعنى حدث (عدم وقوع أى من الحدثين) أو (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)



(ثانيًا) أَ ∪ بَ = (أ ∩ ب)َ

و تعني حدث "عدم وقوع الحدثين معًا" أو حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر."

تعلم

الأحداث المتنافية *Mutually exclusive events*

يقال لحدثين أ ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر.

فمثلاً: **١-** إذا كان أ" حدث النجاح فى امتحان ما" ، ب" حدث الرسوب فى نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٢- فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

إذا كان أ حدث ظهور عدد فردى أى : أ = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ب حدث ظهور عدد زوجى أى : ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

فإن أ ∩ ب = ϕ أى وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر .

تعريف

- يقال: إن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ϕ
- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذًا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

لاحظ :

١- إذا كان أ ∩ ب = ϕ فإن أ ، ب حدثان متنافيان.

و إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة أحداث من ف وكان : أ ∩ ب = ϕ ، ب ∩ ج = ϕ ، ج ∩ أ = ϕ

فإن: أ ، ب، ج أحداث متنافية والعكس صحيح.

٢- الأحداث البسيطة (الأولية) فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.

٣- أى حدث أ ومكمله أ' هما حدثان متنافيان.

مثال

(٤) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها.

أولاً: مثل فضاء العينة هندسيًا واكتب كلًا من الحدثين الآتيين.

الحدث أ " ظهور نفس العدد على الوجهين" الحدث ب " ظهور عددين مجموعهما ٧".

ثانيًا : هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .

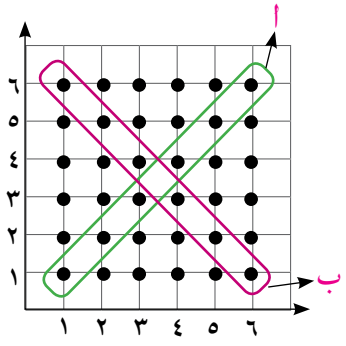
الحل

أولاً : عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هى أزواج مرتبة عددها = $٦^{٢}$ = ٣٦

الشكل المقابل هو التمثيل الهندسى لفضاء العينة؛ حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما فى الشكل .

أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤) ، (٥، ٥) ، (٦، ٦)}

ب = {(٦، ١) ، (٥، ٢)، (٤، ٣) ، (٣، ٤) ، (٢، ٥) ، (١، ٦)}



ثانيًا: ∵ أ ∩ ب = ϕ ∴ أ ، ب حدثان متنافيان

حاول أن تحل

(٤) فى المثال السابق اكتب كلًا من الحدثين الآتيين :

ج حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوى ٥" د حدث " ظهور عددين أحدهما ضعف الآخر"

هل الحدثان ج، د متنافيان ؟ فسر إجابتك.

الاحتمال *Propability*

تعلم

حساب الاحتمال :

إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات، فإن احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف يرمز له بالرمز ل (أ) حيث :

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

مثال

(٥) سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، كرتان لونهما أحمر ، الباقى باللون الأخضر ، احسب احتمال الأحداث الآتية:

أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.

ج حدث أن تكون الكرة ليست خضراء.

الحل

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = ل (أ) = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد جميع الكرات}}$ = $\frac{٢}{١٠}$ = ٠,٢

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء + عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$

= $\frac{٣+٢}{١٠}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = ٠,٥

احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء = ل(ج)

= احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء = $\frac{٥+٢}{١٠}$ = ٠,٧

فكر: هل يمكن الحصول على ل (ج) بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٥) فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء.

هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء .

تعلم

مسلمات الاحتمال

Axioms of probability

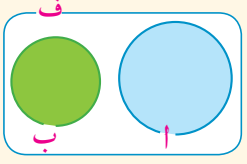
١- لكل حدث أ ⊃ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل(أ)

حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١

٢- ل (ف) = ١

٣- إذا كان أ ⊃ ف، ب ⊃ ف

وكان أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب)



من المسلمات السابقة نلاحظ :

المسلمة الأولى تعنى احتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى ينتمى للفترة [٠، ١]

المسلمة الثانية تعنى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

يمكن تعميم **المسلمة الثالثة** إلى أى عدد محدود من الأحداث المتنافية

ل(أ١ ∪ أ٢ ∪ أ٣ ∪ ... ∪ أن) = ل(أ١) + ل(أ٢)+ل(أ٣) + ...+ ل(أن)

حيث أ١، أ٢، أ٣ ، ... ، أن أحداث متنافية

نتائج هامة

(١) ل (ϕ) = ٠

(٢) ل (أَ) = ١ - ل(أ)

(٣) ل (أ - ب) = ل(أ) - ل (أ ∩ ب)

(٤) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

أضف إلى معلوماتك

إذ كان أ ⊂ ب

فإن ل(أ) ≤ ل(ب)

مثال

٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث :

ل(أ) = ٣/٨ ، ل(ب) = ٣/٤ ، ل (أ ∩ ب) = ١/٤ احسب :

أ ل (أ ∪ ب)　　ب ل(أَ)　　جـ ل (أ - ب)　　د ل (أَ ∩ بَ)

الحل

أ ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ٣/٨ + ٣/٤ - ١/٤ = ٧/٨

ب ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - ٣/٨ = ٥/٨

جـ ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب) = ٣/٨ - ١/٤ = ١/٨

د ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ - ل (أ ∪ ب) = ١ - ٧/٨ = ١/٨

حاول أن تحل

٦ فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أ ل (بَ)　　ب ل(ب - أ)　　جـ ل (أَ ∪ بَ)

مثال

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء تجربة عشوائية ف وكان ل(أ) = ٥/٨ ، ل (ب) = ١/٢ ، ل (أ - ب) = ٣/٨ فأوجد :

أ ل (أ ∩ ب)　　ب ل(أ ∪ ب)　　جـ ل (أَ ∩ بَ)　　د ل (أَ ∪ ب)

الحل

أ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) - ل (أ - ب) = ٥/٨ - ٣/٨ = ٢/٨ = ١/٤

ب ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب) = ٥/٨ + ١/٢ - ١/٤ = ٧/٨

جـ ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ - ل(أ ∪ ب) = ١ - ٧/٨ = ١/٨

د ل (أَ ∪ ب) = ل (أ ∩ ب)َ = ١ - ل (أ ∩ بَ) = ١ - ل (أ - ب)

= ١ - ٣/٨ = ٥/٨

فكر : هل يمكنك إيجاد ل (أ ∪ ب) بطريقة أخرى ؟ وضح ذلك

حاول أن تحل

(٧) فى المثال السابق أوجد :

أ ل (أ) ب ل (أ ∪ ب)′ ج ل (ب ∩ أ)

مثال

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف، وكان ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب)′ = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد :

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

ج احتمال وقوع الحدث ب فقط.

د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

الحل

∵ ل (أ ∪ ب)′ = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = ١ - ل (أ ∩ ب)′ = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

∵ ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ ل (أ) = ١ - $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ $\frac{٤}{٣}$ ل(أ) = ١ ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٧}{٨}$

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر=ل (أ ∩ ب)′ = ل (أ ∪ ب)′ = $\frac{٥}{٨}$

ج احتمال وقوع الحدث ب فقط= ل (ب - أ) = ل(ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٨}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

فكر : هل يمكنك إيجاد احتمال وقوع أحد الحدثين فقط بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب)′ = ٠,١ فاحسب احتمال الأحداث الآتية :

أ حدث "وقوع أحد الحدثين على الأقل"

ب حدث "وقوع أ فقط"

ج حدث " وقوع أحد الحدثين فقط"

د حدث " وقوع أحد الحدثين على الأكثر"

مثال

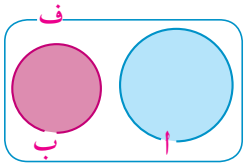
(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل (ب) = ٣ ل (أ) ، ل (أ ∪ ب)= ٠,٧٢ أوجد ل (أ) ، ل (ب)

أولًا: إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين .

ثانيًا: إذا كان أ ⊃ ب

الحل

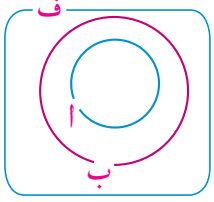


بفرض أن ل (أ) = س ∴ ل (ب) = ٣ س

أولًا: ∵ أ ، ب حدثان متنافيان.

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) فيكون : ٠,٧٢ = ٣ س + س

∴ س = ٠,١٨ ، ل (أ) = ٠,١٨ ، ل (ب) = ٠,٥٤



ثانيًا: ∵ أ ⊃ ب ∴ أ ∪ ب = ب

ل (أ ∪ ب) = ل (ب) = ٣س = ٠,٧٢

∴ ل (أ) = ٠,٢٤ ، ل (ب) = ٠,٧٢

حاول أن تحل

(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل(ب) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ)

أ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين. ب إذا كان ب ⊃ أ

تفكير ناقد:

بيِّن كيف يمكن حساب ل (أ) إذا كان أ ⊃ ف ، ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، إذا كان: $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أ)}} = \frac{٣}{٧}$

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث ف = { أ ، ب ، ج} ، وكان $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أ)}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ل (ب)}}{\text{ل (ب)}} = \frac{٥}{٢}$ ،

أوجد ل(ج)

مثال

(١٠) **الربط بالبيئة المدرسية:** إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان الفيزياء يساوى ٠,٨٥ ، واحتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات ٠,٩ واحتمال نجاحه فى الامتحانين معًا ٠,٨ أوجد احتمال :

أ نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل. ب نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط.

ج عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا.

الحل

ليكن أ حدث نجاح الطالب فى امتحان الفيزياء ، ب حدث نجاح الطالب فى الرياضيات

فيكون : ل (أ) = ٠,٨٥ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٨

أ احتمال نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ٠,٨٥ + ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,٩٥

ب احتمال نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات وعدم نجاحه فى امتحان الفيزياء أى ل (ب - أ)

∴ ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (ب ∩ أ) = ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,١

ج حدث عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا = (أ ∩ ب)′ وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب)′ = ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

تطبيقات حياتية:

حاول أن تحل

(١١) للحصول على وظيفة فى إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظرى، والآخر عملى، إذا كان احتمال النجاح فى الاختبار النظرى ٠,٧٥ واحتمال نجاحه فى الاختبار العملى ٠,٦ واحتمال النجاح فى الاختبارين معًا ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال :

أ نجاحه فى الاختبار النظرى فقط. ب نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل .

تفكير ناقد:

الربط بالرياضة: صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه فى المباراتين معًا ٠,٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسر إجابتك.

مثال

(١١) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، احسب احتمال:

أولاً: أ حدث أن يكون "مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوى ٤"

ثانيًا: ب حدث أن يكون " أحد العددين ضعف الآخر"

ثالثًا: ج حدث أن يكون "الفرق المطلق للعددين يساوى ٢"

رابعًا: د حدث أن يكون " مجموع العددين أكبر من ١٢ "

الحل

ن(ف) = ٣٦

أولاً: أ = {(١،١)، (١،٢) ، (١،٣)، (٢،١)، (٢،٢)، (٣،١) } ∴ ن (أ) = ٦، ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ثانيًا: ب = { (١،٢)، (٢،١)، (٢،٤)، (٤،٢)، (٣،٦) ، (٦،٣)} ∴ ن (ب) = ٦ ∴ ل (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ثالثًا: ج = {(١،٣)، (٣،١)، (٢،٤)، (٤،٢)، (٣،٥)، (٥،٣) ، (٤،٦) ، (٦،٤)} ∴ ل(ج) = $\frac{٨}{٣٦}$ = $\frac{٢}{٩}$

رابعًا: حيث إنه لايمكن أن يظهر عددان مجموعهما أكبر من ١٢، ∴ د = ϕ ، ل (د) = صفر

حاول أن تحل

(١٢) فى المثال السابق احسب احتمال الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث " العددان الظاهران متساويان "

ثانيًا: ب حدث " العدد فى الرمية الأولى فردي وفى الرمية الثانية زوجي"

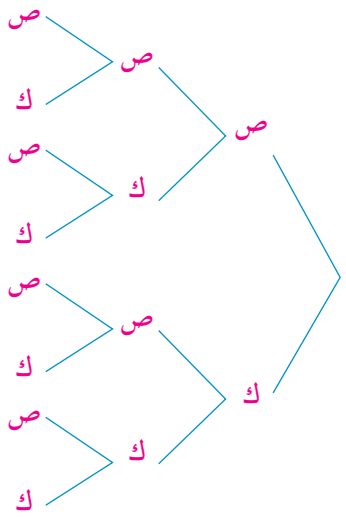
مثال

(١٢) ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط.

ثانيًا: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثًا: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.



الحل

ف = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك) ،
(ك، ص، ص)، (ك، ص، ك) ، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}،
ن (ف) = ٨

أولاً: ∵ أ حدث ظهور صورة واحدة فقط .

∴ أ = { (ص، ك، ك) ، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)} ،

∵ ن(أ) = ٣ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$

ثانيًا : ∵ ب حدث ظهور صورتين على الأقل، أى إما صورتان أو ثلاث صور

∴ ب = { (ص، ص، ك) ، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}

∵ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

ثالثًا: ∵ ج حدث ظهور صورتين بالضبط

∴ ج = { (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)} ∵ ن (ج) = ٣ ∴ ل (ج) = $\frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

(١٣) فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أولاً : أ حدث ظهورنفس الوجه في الرميات الثلاث ثانيًا : ب حدث ظهور صورة على الأكثر.

ثالثًا: ج حدث ظهور عدد فردى من الصور رابعًا: د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامسًا: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات.

مثال

(١٣) الارتباط بالمجتمع: فى أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة، وبياناتهم موضحة بالجدول التالى :

	يتحدث العربية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث الفرنسية	المجموع
رجل	٥٠	٤٥	٢٥	١٢٠
امرأة	٤٥	٣٠	٥	٨٠
المجموع	٩٥	٧٥	٣٠	٢٠٠

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائيًّا فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار:

أ امرأة تتحدث العربية.
ب رجل يتحدث الإنجليزية.
ج يتحدث العربية أو الفرنسية.
د يتحدث العربية والإنجليزية.
هـ امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا يتحدث العربية.

الحل

أ احتمال أن يكون المختار " امرأة تتحدث العربية " = $\frac{٤٥}{٢٠٠}$ = ٠,٢٢٥

ب احتمال أن يكون المختار "رجل يتحدث الإنجليزية" = $\frac{٤٥}{٢٠٠}$ = ٠,٢٢٥

ج احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية أو الفرنسية" = $\frac{٩٥ + ٣٠}{٢٠٠}$ = ٠,٦٢٥

د احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية والإنجليزية" = ل (ϕ) = صفر

هـ احتمال أن يكون المختار "امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا تتحدث العربية" = $\frac{٥}{٢٠٠}$ = ٠,٠٢٥

حاول أن تحل

(١٤) في المثال السابق احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

أ لا يتحدث الإنجليزية.
ب يتحدث الألمانية.
ج إمرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية.
د رجل يتحدث العربية أو امرأة تتحدث الإنجليزية.

تمـارين (٤ - ١)

(١) يرغب طالب في شراء حقيبة و يمكنه اختيارها من ثلاثة أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بُنيًّا ، مثِّل فضاء العينة في هذا الموقف بالشجرة البيانية.

(٢) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

أ اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلًّا من الأحداث الآتية.

- الحدث أ «ظهور صورة وعدد فردي».
- الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجي».
- الحدث ج «ظهور عدد أولي أكبر من ٢».
- الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

(٣) في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.
عين كلًّا من الأحداث التالية:

- الحدث أ «ظهور عددين متساويين».
- الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣».
- الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

(٤) من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤} كون عددًا من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

- أ حدث أن يكون رقم الآحاد فرديًّا .
- ب حدث أن يكون رقم العشرات فرديًّا.
- ج حدث أن يكون كلا الرقمين فرديًّا.
- د حدث أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًّا.

(٥) حقيبة بها ٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية :

أ حدث " العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠"
ب حدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٢"
ج حدث " العدد المسجل فردى و يقبل القسمة على ٣"
د حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢، ٥ "
هـ حدث " العدد المسجل أولى"
و حدث " العدد المسجل يحقق المتباينة ٥س - ٣ ⩾ ١٧ "

(٦) سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ و إذا كان :

أ حدث " العدد فى السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد فى السحبة الأولى"
ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣"
اكتب كلًّا من أ ،ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

(٧) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات مثِّل فضاء النواتج بشكل شجرى، ثم عيِّن الأحداث الآتية :

أ حدث " ظهور كتابتين على الأقل"
ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر"
ج حدث " ظهور صورة فى الرمية الأولى"
د حدث " عدم ظهور صورة فى الرميات الثلاث "

(٨) ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، مثِّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية :

أ حدث " ظهور كتابة وعدد زوجى"
ب حدث " ظهور صورة وعدد فردى"
ج حدث " عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب"
د حدث " وقوع الحدث أ فقط "
هـ حدث " وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب"

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

(٩) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو:

أ $\frac{٢}{٥}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٦}$

(١٠) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى وعدد أولى فى الرمية الثانية هو :

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{١}{٦}$ ج $\frac{١}{٩}$ د $\frac{١}{٤}$

(١١) إذا سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن:

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو :

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ج $\frac{٧}{١٥}$ د $\frac{١}{٢}$

(١٢) يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائيًّا، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًّا هو :

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{٧}{٩}$ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٥}{٩}$

(١٣) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان ب⊂ أ ، ل (أ) = ٢ل(ب) = ٠,٦ فإن ل (أ -ب) يساوى:

أ ٠,٦ ب ٠,٣ ج ٠,٤ د ٠,٢

(١٤) ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوي:

أ احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ "حدث ظهور عدد فردى."
- ب "حدث ظهور عدد أولى."
- ج "حدث ظهور عدد زوجى."
- د "حدث ظهور عدد أكبر من ١٢."
- هـ "حدث ظهور عدد مكون من رقمين."
- و "حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد."

ب احسب: ل(أ ∪ ج) ، ل(هـ ∪ و) ، ، ل(ب ∩ د).

(١٥) إذا كان ف = {أ ، ب، ج، د} فضاء عينة لتجربة عشوائية، أوجد:
ل(أ) ، ل(ب) ، إذا كان ل (أ) = ٣ ل(ب)، ل(ج) = ل(د) = $\frac{٧}{١٨}$

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان:
ل (أ ∪ ب) = ٠,٦، ل (أ - ب) = ٠,٢٥ أحسب ل(أ)، ل(ب).

(١٧) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل(أ) = $\frac{١}{٣}$، ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد:

أ ل(أ') ب ل(أ ∪ ب) ج ل(أ - ب) د ل(أ' ∩ ب')

(١٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:
ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب') = ٣ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب احتمال:

أ وقوع أ فقط. ب وقوع أ أو ب. ج وقوع أ وعدم وقوع ب.

(١٩) صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء، سحبت منه كرة واحدة عشوائيًّا. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ حمراء. ب زرقاء أو صفراء. ج ليست زرقاء. د ليست حمراء ولا صفراء.

(٢٠) مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًّا ولوحظ العدد المدون عليها. احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:

أ عددًا يقبل القسمة على ٣ ب عددًا يقبل القسمة على ٥
ج عددًا يقبل القسمة على ٣ و ٥ د عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

(٢١) ألقيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين.
- ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة على الأكثر.
- د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل.

(٢٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة، احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى.
- حدث مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨
- حدث مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوي ٥

(٢٣) **الربط بالرياضة:** عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى، وجد أن ٤٠ شخصًا، منهم يشجع نادى الهلال، و٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة، وأن ٨ أشخاص لايشجعون أيًّا من الناديين.
إذا اختير شخص عشوائيًّا من أفراد العينة، فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعى:

أ أحد الناديين على الأقل.
ب الناديين معًا.
ج نادى الهلال فقط.
د أحد الناديين فقط.

(٢٤) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، ب حدث ظهور عدد زوجى . احسب احتمال وقوع كلٍّ من الحدثين أ ، ب ثم احسب احتمال كلًّا من الأحداث الآتية :

أ وقوع أحد الحدثين على الأقل
ب وقوع الحدثين معًا
ج وقوع ب فقط
د وقوع أحد من الحدثين فقط

(٢٥) سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من ٥٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٥٠، احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:

أ مضاعفًا للعدد ٧
ب مربعًا كاملا
ج مضاعف للعدد ٧ ومربعًا كاملاً
د ليس مربعًا كاملًا، وليس مضاعفًا للعدد ٧

(٢٦) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، ل(ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (أ) ، ل (أ-ب) = ٠,٢٤
ل (ب∩أ') = ٠,١٥ أوجد : ل (أ)، ل (ب)، ل (أ∪ب)، ل (أ'∪ب')

(٢٧) كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد ٢٥ خطابًا أخرى، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، فإذا اختير خطاب عشوائيًّا مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد، فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :

أ بلا أخطاء .
ب زياد هو الذى كتب الخطاب.
ج زياد لم يخطئ فى كتابته.
د طارق قد أخطأ فى كتابته .

(٢٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف، ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٨، ل (أ'∪ب') = ٠,٥ فاحسب ل(أ∩ب)

ملخص الوحدة

١ **التجربة العشوائية** : هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

٢ **فضاء العينة (فضاء النواتج)**: فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له بالرمز ف.

٣ **الحدث** : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

٤ **الحدث بسيط (أولى)**: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحوى عنصرًا واحدًا فقط.

٥ **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف.

٦ **الحدث المستحيل**: هو الحدث الخالى من أى عنصر ويرمز له بالرمز ϕ.

٧ **العمليات على الأحداث**: التقاطع - الاتحاد - الإكمال - الفرق.

٨ **الأحداث المتنافية**

يقال إن الحدثين أ، ب متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ϕ.

- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

٩ **حساب الاحتمال**

- إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما ، والأحداث الأولية التى تحويها متساوية الإمكانات.
- فإن احتمال وقوع أى حدث أ ⊃ ف يرمز له بالرمز ل(أ) حيث ل(أ) = $\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$

١٠ **مسلمات الاحتمال**

- لكل حدث أ ⊃ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل حيث : ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١
- ل(ف) = ١
- إذا كان أ ⊃ ف، ب ⊃ ف وكان أ، ب حدثين متنافيين فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

١١ إذا كان أ$_١$ ∪ أ$_٢$ ∪ أ$_٣$ ∪ ∪ أ$_ن$ = ف حيث أ$_١$، أ$_٢$، أ$_٣$،... ، أ$_ن$ جميعها أحداث متنافية

فإن ل(أ$_١$) + ل(أ$_٢$) + ل(أ$_٣$) + ... + ل(أ$_ن$) = ١

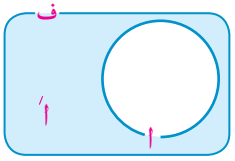
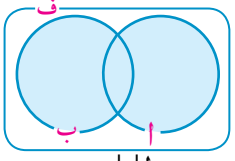
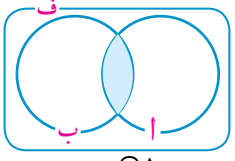
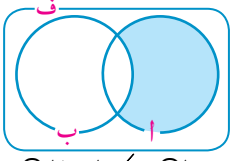
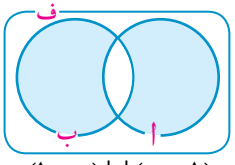
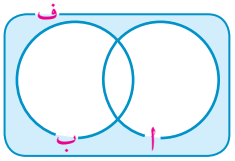
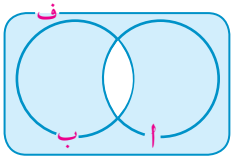
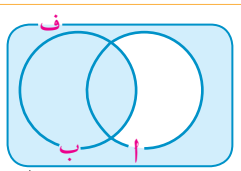
١٢ ل(ϕ) = ٠

١٢ إذا كان أ ⊃ ف حيث ف فضاء نواتج لتجربة عشوائية فإن ل(أ$'$) = ١ - ل(أ)

١٣ لأى حدثين أ ، ب من ف فضاء نواتج لتجربة عشوائية فإن

أ ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب) ب ل(أ - ب) = ل(أ) - ل (أ ∩ ب)

١٤ الأحداث بالصورة اللفظية وتمثيلها بشكل ڤن، واحتمالاتها:

الحدث فى صورة لفظية	تمثيل الحدث بشكل ڤن	احتمال وقوع الحدث
عدم وقوع الحدث أ		ل(أ') = ١ - ل(أ)
وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)	 أ ∪ ب	ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)
وقوع أ و ب (وقوعهما معًا)	 أ ∩ ب	ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∪ ب)
وقوع الحدث أ فقط (وقوع أ وعدم وقوع ب)	 أ - ب = أ ∩ ب' = أ - (أ ∩ ب)	ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب) = ل(أ ∩ ب')
وقوع أحدهما فقط (وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط)	 (أ - ب) ∪ (ب - أ)	ل((أ - ب) ∪ (ب - أ)) = ل(أ - ب) + ل(ب - أ) = ل(أ ∪ ب) - ل(أ ∩ ب)
عدم وقوع أى من الحدثين (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)	 (أ ∪ ب)' = أ' ∩ ب'	ل(أ ∪ ب)' = ل(أ' ∩ ب') = ١ - ل (أ ∪ ب)
عدم وقوع الحدثين معًا (عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب) أو (وقوع أحدهما على الأكثر)	 (أ ∩ ب)' = أ' ∪ ب'	ل(أ ∩ ب)' = ل(أ' ∪ ب') = ١ - ل(أ ∩ ب)
عدم وقوع أ فقط (وقوع ب أو عدم وقوع أ)	 (أ - ب)' = ب ∪ أ'	ل(أ - ب)' = ١ - ل(أ - ب) = ل (ب ∪ أ') = ل (أ) + ل (أ ∩ ب)

تمارين عامة (الوحدة الرابعة)

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن :

١ احتمال الحصول على العدد ٥ فى الرمية الأولى والعدد ٦ فى الرمية الثانية هو:

أ $\frac{١}{٢٤}$ ب $\frac{١}{٣٠}$ ج $\frac{١}{٣٦}$ د $\frac{١}{٦}$

٢ احتمال الحصول على العدد ٥ فى إحدى الرميتين والعدد ٦ فى الرمية الأخرى هو:

أ $\frac{١}{١٢}$ ب $\frac{١}{٦}$ ج $\frac{٥}{٣٦}$ د $\frac{١}{١٨}$

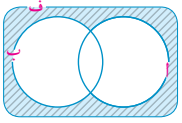
٣ احتمال الحصول على عددين متساويين فى الرميتين هو:

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{١}{٣٦}$ ج $\frac{١}{٦}$ د $\frac{١}{١٨}$

أ ، ب حدثان من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، اختر الحدث الذى يعبر عن الجزء المظلل بشكل ڤن المقابل:

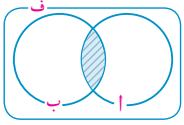
٤ أ ف - (أ ∪ ب) ب أ′ ∪ ب′

ج ف - (أ′ ∪ ب′) د (أ ∩ ب)′



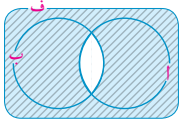
٥ أ أ ∩ ب ب أ ∪ ب′

ج (أ ∪ ب)′ د أ′ ∪ ب′



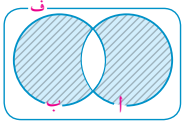
٦ أ (أ ∪ ب) - (أ ∩ ب) ب ف - (أ ∩ ب)′

ج ف - (أ ∪ ب)′ د ف - (أ ∩ ب)



٧ أ ف - (أ ∩ ب) ب أ′ ∩ ب′

ج (أ - ب) ∪ (ب - أ) د ف - (أ ∪ ب)′



٨ كون من أرقام العدد ٤٣٢١ أعداد، كل منها يتكون من رقمين مختلفين . مثل فضاء النواتج بشكل شجرة بيانية، ثم اكتب فضاء النواتج والأحداث الآتية :

أ حدث " مجموعة الأعداد الأولية ".

ب حدث " مجموعة الأعداد التى تقبل القسمة على ٣".

ج حدث " مجموعة الأعداد التى تقبل القسمة على ٣ و ٥".

د حدث" مجموعة الأعداد التى بها الآحاد ضعف العشرات".

٩ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى، احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر :

أ أوليًا ب من عوامل ٦ ج فرديًا يقبل القسمة على ٣

(١٠) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية.

أكمل لتكون العبارة صحيحة فيما يأتى:

أ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين:

➢ أ ∩ ب = ... ➢ أ - ب = ... ➢ ب - أ = ...

ب إذا كان ب ⊃ أ فإن:

➢ (أ ∩ ب) = ... ➢ أ ∪ ب = ... ➢ ب - أ = ...

جـ إذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن:

➢ ل(أ ∪ ب) = ... ➢ ل(ب - أ) = ... ➢ ل(أَ ∩ بَ) = ...

د إذا كان أ ∩ ب = ϕ ، ل(أ) = ٠,٧ ، ل(بَ) = ٠,٤ فإن:

➢ ل(أ ∪ ب) = ... ➢ ل(أ ∩ ب) = ... ➢ ل(أ - ب) = ...

(١١) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، وكان أ ⊃ ب ، ل(أ) = $\frac{١}{٢}$، احتمال وقوع ب فقط يساوي ٠,٢ . احسب احتمال عدم وقوع ب.

(١٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، ل دالة احتمال معرفة على ف، وكان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = س، ل(أ ∪ ب)$'$ = $\frac{١}{٣}$

أ أوجد قيمة س إذا كان: ➢ أ، ب حدثان متنافيان. ➢ أ ⊃ ب.

ب إذا كانت س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد ل(أ ∩ ب).

(١٣) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، أعط تعبيرًا رمزيًّا لكل من الأحداث الآتية، ومثلها بشكل ڤن:

أ عدم وقوع الحدث أ.

ب وقوع أى الحدثين أ أو ب.

جـ وقوع الحدث ب فقط.

د وقوع أ أو عدم وقوع ب.

هـ عدم وقوع الحدثين معًا.

و وقوع أحدهما فقط.

(١٤) فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، وملاحظة تتابع الصور والكتابات، مثِّل فضاء العينة لهذه التجربة بالشجرة البيانية، ثم احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

أ الحدث أ «ظهور صورتين فقط».

ب الحدث ب «ظهور صورتين على الأكثر».

جـ الحدث ج «ظهور كتابة واحدة على الأكثر».

د الحدث د «ظهور نفس الوجه فى الرميات الثلاث».

(١٥) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى.

أ ارسم شكلًا هندسيًّا يمثل فضاء العينة ف موضحًا عليه كلًّا من الأحداث الآتية:

- الحدث أ «الحصول على عددين مجموعهم فردى وأكبر من ٦».
- الحدث ب «الحصول على عددين أحدهما ٢ ومجموعها ⩾ ٥».
- الحدث ج «الحصول على عددين متساويين».

ب أى الأحداث أ، ب، ج متنافية مثنى مثنى؟

جـ احسب كل من : ل(أ ∪ ب) ، ل(ب ∩ ج) ، ل(أ ∪ ج)′ ، ل(ب - ج).

(١٦) خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الآخرى مع الإحلال، وملاحظة الرقم المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين. أوجد احتمال:

أ أن يكون رقم الأحاد عددًا أوليًّا.

ب أن يكون رقم العشرات عددًا فرديًّا.

جـ أن يكون رقم الأحاد عددًا أوليًّا أو رقم العشرات عددًا فرديًّا.

صحف:

(١٧) فى عينة من ٥٠ شخصًا، وجد أن ٢٧ شخصًا يقرؤن الصحيفة أ، ٢٤ يقرؤن الصحيفة ب، ٩ أشخاص يقرؤن الصحيفتين معًا. اختير شخص واحد من هذه العينة عشوائيًّا. أوجد احتمال أن يقرأ الشخص المختار.

أ الصحيفة أ فقط.

ب إحدى الصحيفتين على الأقل.

سياحة:

(١٨) فى أحد عروض مشروع الصوت والضوء بالهرم حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة بيانهم موضح بالجدول الآتى ، فإذا اختير أحد الحاضرين عشوائيًّا عن طريق بطاقات الدخول الخاصة بهم لمنحه جائزة تذكارية. أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار

	عربى	أوروبى	أمريكى	المجموع
رجل	٣٢	٤٧	١٥	٩٤
سيدة	٢٣	٦٣	٢٠	١٠٦
المجموع	٥٥	١١٠	٣٥	٢٠٠

أ رجلًا أوروبيًّا.

ب سيدة أمريكية.

جـ سيدة.

د ذو جنسية عربية أو أوروبية.

(١٩) إذا كان ف = {أ، ب، ج}، فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان:

٢٠ل(أ) = ١٥ل(ب) = ١٢ل(ج) فأوجد: ل(أ) ، ل(ب) ، ل(ج)

اختبار تراكمى

أكمل ما يأتى:

١ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن فضاء النواتج ف = ...

٢ عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين متتاليتين، وملاحظة الوجه العلوى، فإن حدث ظهور صورة على الأكثر = ...

٣ عند إلقاء حجر نرد منتظم ثم قطعة نقود وملاحظة الوجه العلوى لكل منهما فإن حدث ظهور عدد أولى = ...

٤ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوى فى كل مرة، فإن حدث " مجموع العددين الظاهرين يساوى ٥" = ...

٥ عند سحب بطاقة من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الظاهر على البطاقة فإن حدث « العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣ " = ...

٦ عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتاليات وملاحظة تتابع الصور والكتابات، فإن حدث "ظهور صورتين بالضبط" = ...

٧ إذا كان أ ⊃ ف حيث ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ، وكان ل(أَ) = ٣ ل(أ) فأوجد ل(أ) .

٨ صندوق به ٢٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًّا، أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :

أ يقبل القسمة على ٦ ب أوليًّا أكبر من ١٠ ج من عوامل العدد ١٢

٩ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨٥ ، ل(أ) = ٠,٧٥ ، ل(بَ) = ٠,٦ أوجد:

أ ل (أ ∩ ب) ب ل (أ ∩ بَ) ج ل (أَ ∪ بَ)

١٠ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان ل (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ل(ب) ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر يساوى ٠,٧٥ ، احتمال حدث "وقوع أحدهما على الأقل" يساوى ٠,٦ فأوجد احتمال الأحداث الآتية:

أ احتمال وقوعهما معًا. ب وقوع أحد الحدثين فقط. ج وقوع ب أو عدم وقوع أ.

١١ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان ل (أَ) = $\frac{٣}{٥}$ ل(أ ∪ ب)= ٠,٤٥ فأوجد ل (ب) فى الحالات الاتية :

أ أ، ب حدثان متنافيان ب أ ⊃ ب ج ل(ب - أ) = ٠,٢

١٢ الربط بالسياحة: فوج سياحى مكون من ١٩ سائحًا من روسيا، ١٧ سائحًا من إيطاليا، ١٤ سائحًا من فرنسا، اختير أحدهم عشوائيًّا، احسب احتمال أن يكون السائح:

أ من روسيا أو من فرنسا.
ب ليس من فرنسا.
جـ من أوروبا.
د من هولندا.

(١٣) **الربط بالبيئة المدرسية :** فى احتفال المدرسة بتكريم أوائل طلابها، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨، واحتمال حضور مدير عام التعليم ٠,٩ واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٥ أوجد:
أ احتمال حضور المحافظ فقط.
ب احتمال حضور أحدهما على الأقل.
جـ احتمال عدم حضورهما معًا.

(١٤) أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ف.
فإذا كان ل(أ) = ٠,٦، ل(ب`) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:
أ وقوع أ و ب
ب وقوع أ وعدم وقوع ب
جـ وقوع أ فقط أو ب فقط

(١٥) إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث ف= {أ، ب، جـ}
وكان $\frac{ل(أ')}{ل(أ)} = \frac{٧}{٣}$ ، ٢ ل (ب) = ٣ ل(ب`) فأوجد $\frac{ل(جـ)}{ل(جـ)}$

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:
ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ` ∪ ب`) = ٠,٧ فأوجد احتمال كل مما يأتي:
أولًا: وقوع الحدثين أ، معًا
ثانيًا: وقوع حدث أ فقط
ثالثًا: وقوع أحد الحدثين على الأقل
رابعًا: وقوع أحد الحدثين فقط

(١٧) تقدم لوظيفة بأحد البنوك ٥٠ شخصًا موزعين كما هو موضح بالجدول التالي، اختير أحد المتقدمين عشوائيًا، أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار:

الجنس	مؤهلات عليا	مؤهلات متوسطة	المجموع
ذكر	١٦	١٤	٣٠
أنثى	١٢	٨	٢٠
المجموع	٢٨	٢٢	٥٠

أولًا: أنثى.
ثانيًا: من ذوى المؤهلات المتوسطة.
ثالثًا: ذكر من المؤهلات العليا.
رابعًا: أنثى أو من ذوى المؤهلات العليا.

الاختبارات العامة

الاختبار الأول — الجبر

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) قاعدة المتتابعة (١ × ٢) ، (٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) هى

أ (ن - ١)(ن + ١) ب ن(ن + ١) ج ٢ن(ن + ١) د (ن + ١)(ن + ٢)

(٢) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو

أ ٨ ب ١٢ ج ١٠ د ٢

(٣) مجموع المتسلسله $\sum_{ر=١}^{٣}$ ٣ر = ...

أ ١ ب ٣ ج ٦ د ١٨

(٤) °ل٣ = ...

أ ٥ ب ٣ ج ٦٠ د ١٥

السؤال الثانى:

(١) أوجد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة (١١ ، ٩ ، ٧ ، ...)

(٢) فى المتتابعة الحسابية (١٦ + ٤٠س ، ٥٠س - ٩ ، ... ، ٣س + ١٥ ، ٥س + ٦) أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدود المتتابعة.

السؤال الثالث:

(١) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان ع١ + ع٣ = ٤٨ ، ع٣ + ع٤ = ١٩٢

أ اكتب هذه المتتابعة. ب أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

(٢) اكتب كلًّا من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة

أ $\sum_{ر=٢}^{٧}$ ١ - ٢ر ب $\sum_{ر=١}^{٨}$ (-١/٢)^ر

السؤال الرابع:

(١) أوجد قيمة كل من:

أ |٥ - |٣ ب |٥ × |٢

(٢) أوجد مجموعة حل من المعادلات الآتية:

أ ق ر^١٢ = ق ر^٢ + ٣ ب |ن - ٨ = ١

الاختبار الثاني — الجبر

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) الوسط الهندسى للعددين ٤، ١٦ هو

أ) ٨ ب) ٨ جـ) ± ٨ د) ٤

(٢) مجموع حدود المتتابعة (١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ١٧ ، ١٩) هو

أ) ٢٠ ب) ٥٠ جـ) ١٠٠ د) ٣٠

(٣) إذا كان الوسط الحسابى للعددين س ، ١٦ هو ٣ فإن س تساوى

أ) -١٠ ب) ٣ جـ) ١٦ د) ٦

(٤) إذا كان $^{٥}و_{ر} = ١٠$ فإن ر = ...

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ١٠ د) ١

السؤال الثانى:

(١) ادخل ثمانية أوساط حسابية بين العددين ٢، ٢٩ ثم أوجد مجموع تلك الأوساط.

(٢) متتابعة هندسية موجبة غير منتهية مجموع حديها الأول والثانى ٣٦ ومربع حدها الثالث ٣٦ أوجد المتتابعة. ثم أوجد مجموعها ابتداء من الحد الأول.

السؤال الثالث:

(١) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وكان $ع_{٣} = ١٢$ ، $ع_{٤} = ٢ع_{٣}$ أوجد مجموع السبعه حدود الأولى منها.

(٢) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

أ) $\sum_{ر=١}^{١٠} (\frac{١}{٣})^{ر-١}$ ب) $\sum_{ك=٣}^{٩} ٣ك + ١$

السؤال الرابع:

(١) أوجد قيمة كل من

أ) $\frac{|٥|}{|٢|} - |٢|$ ب) $\sum_{ر=١}^{٣} ^{٤}و_{ر}$

(٢) ما عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب ٥ أشخاص فى صف واحد؟

الاختبار الثالث — الجبر

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) متتابعة هندسية فيها ع$_{ن}$ = $\frac{١}{٢}$ ع$_{ن-١}$ فإن أساس المتتابعة يساوى:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٢ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٢}{٣}$

(٢) إذا كان ع$_{ن}$ = ١٥ - ٣ن فإن أول حد سالب فى المتتابعة هو:

أ) ع$_{٣}$ ب) ع$_{٥}$ ج) ع$_{٦}$ د) ع$_{١٥}$

(٣) الحد السابع فى المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٨ × $(\frac{١}{٢})^{ن-١}$ =

أ) ٨ ب) ٤ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٨}$

(٤) إذا كان $\sum_{ر=١}^{ن}$ ص$_{ر}$ = ل فإن $\sum_{ر=١}^{ن}$ ٢ص$_{ر}$ =

أ) ص ب) ص$^{+}$ ج) ع د) ط

السؤال الثانى:

(١) إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ وكانت النسبة بين الوسط الثانى إلى الوسط الأخير تساوى ٢ : ٧ فما عدد هذه الأوساط؟

(٢) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ٩، وحدها السادس يساوى ٢٤٣ أوجد المتتابعة ومجموع الثمانية حدود الأولى.

السؤال الثالث:

(١) إذا كان ع$_{ن+١}$ - ع$_{ن}$ = ٢ فى متتابعة حسابية، وكان الحد الأول من المتتابعة = ٦، فأوجد المتتابعة، ثم أوجد مجموع العشرة حدود الأولى ابتداء من الحد الأول.

(٢) اكتب كلًّا من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك.

أ) $\sum_{ر=٣}^{٧}$ $(\frac{١}{٣})^{ر+١}$ ٢ ب) $\sum_{ر=١}^{٥}$ $(\frac{١}{٣})^{ر}$

السؤال الرابع:

(١) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٣ رجال وسيدتين من بين ٤رجال و٣ سيدات.

(٢) أوجد قيمة كل من

أ) ل$_{٣}^{٨}$ ب) ل$_{٣}^{٥}$ - ل$_{٢}^{٥}$

الاختبار الرابع — الجبر

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) $(ع_ن) = (٣ن - ٥)$ متتابعة حسابية أساسها = ... وحدها الثانى = ...

أ) ٣ ، ١ ب) ١ ، ٣ ج) ٣ ، -٢ د) ٥ ، -٢

(٢) الوسط الحسابى لأى عددين موجبين مختلفين وسطها الهندسى

أ) < ب) > ج) = د) ≥

(٣) إذا كان $ع_ن - ع_{ن+١} = ٣$ فإن أساس المتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ = ...

أ) ٣ ب) -٣ ج) ١ د) -١

(٤) إذا كان $ن و_م = ٥٦$ فإن ن = ...

أ) ٨ ب) ٢ ج) ١٠ د) ٥

السؤال الثانى:

(١) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى ٣ وحدها الأخير يساوى ٣٩ ومجموع ن حدًّا الأولى منها يساوى ٢١٠

(٢) فى المتسلسلة الحسابية $(٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ...)$ أوجد:

أ) مجموع ١٥ حدًا الأولى منها.

ب) مجموع حدود المتسلسلة ابتداء من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر.

السؤال الثالث:

(١) (أ ، ٣٢٠ ، ب ، جـ ، ٤٠ ، ...) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة أوجد قيم أ، ب، جـ. ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدود هذه المتتابعة بدءًا من حدها الأول.

(٢) اكتب ثلاث متتابعات هندسية الحد الأول لكل منها ٣ بحيث تكون الأولى تزايدية والثانية تناقصية والثالثة ثابتة ثم أوجد مجموع إحدى هذه المتتاليات إلى مالا نهاية.

السؤال الرابع:

(١) أوجد عدد المجموعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ}

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ) $\frac{|ن}{|ن - ٤} = ٧٢٠$ ب) $و_{م}^{٩} = و_{م}^{٩} \times و_{م}^{١-}$

الاختبار الخامس — الجبر

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) متتابعة هندسية فيها $ع_{ن-١} = \frac{٣}{٥} ع_{ن}$ فإن اساس المتتابعة يساوى:

أ) ٣ ب) ٥ ج) $\frac{٥}{٣}$ د) $\frac{٣}{٥}$

(٢) إذا كانت أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن القيمة العددية للمقدار (أ + ب) تساوى:

أ) ٢٤ ب) ٤٨ ج) ١٢ د) ٦

(٣) عددان وسطهما الهندسى = ٧ فان حاصل ضربها = ...

أ) ٧ ب) ٤٩ ج) ١٤ د) ٤٩-

(٤) إذا كان $ن_{هـ٣} = ٣٥$ فإن ن = ...

أ) ٣ ب) ٥ ج) ٧ د) ١٠

السؤال الثانى:

(١) فى المتتابعة الهندسية (٢، ٤، ٨،) أوجد

أ) الحد الخامس ب) رتبة الحد الذى قيمته ٥١٢

(٢) أدخل سبعة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{٨١}{١٦}$ ، $\frac{١٦}{٨١}$

السؤال الثالث:

(١) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٨، ١١، ١٤،، ٥٠) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

(٢) أوجد عدد الحدود اللازم اخذها من المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١،) ابتداء من الحد الأول حتى يتلاشى المجموع

السؤال الرابع:

(١) أوجد قيمة كل من

أ) $ل_{٣}^{٦} + ل_{١}^{٦}$ ب) $\sum_{ر=١}^{٥} هـ_{ر}^{٦}$

(٢) بكم طريقة يمكن ارتداء قميص وبنطلون من ٤ قمصان و ٣بنطلونات؟

الاختبار السادس — التفاضل والتكامل والاحتمال

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) متوسط تغير الدالة د(س) = س^{٢} عندما تتغير س من ١ إلى ٢ يساوى

أ) -٣ ب) ١ ج) ٤ د) ٣

(٢) مشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} - ٣ هى

أ) ٢س ب) ٢س - ٣ ج) س^{٢} د) ٣ - ٢س

(٣) إذا كان أ، ب حدثان متنافيان فإن ل(أ ∩ ب) = ...

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) صفر د) ١

(٤) $\int$ ٣س^{٢} ء س = ...

أ) س^{٣} + ث ب) س^{٢} + ث ج) ٣س^{٢} + ث د) س^{٣}

السؤال الثانى:

(١) إذا كان د(س) = س^{٢} + ١ فأوجد معدل التغير، ثم احسب قيمته عندما س = ١

(٢) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٣ فاوجد ل(أ ∪ ب)

السؤال الثالث:

(١) إذا كان ص = (س^{٢} + ١)(س^{٢} + ٣) فأوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى.
اكتب فضاء العينة ثم عين الأحداث الآتية مع ذكر عدد عناصر كل منها

- الحدث أ «ظهور عدد أولى».
- الحدث ب «ظهور عدد يقبل القسمة على ٦»
- الحدث ج «ظهور عدد يقبل القسمة على ٧»

السؤال الرابع

(١) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٢} - ٢س عند النقطة (١، -١).

(٢) أوجد:

أ) $\int$ (٢س + ٣) ء س ب) $\int \frac{\text{س}^{٣}+١}{\text{س}+١}$ ء س

الاختبار السابع — التفاضل والتكامل والاحتمال

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) إذا د(س) = ٢س فإن $\int$ د(س) ء س

أ) $س^{٢}$ ب) $س^{٢} + ث$ ج) ٢س د) ٢س + ث

(٢) مشتقة الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ يساوى

أ) $\frac{١}{س^{٢}}$ ب) $\frac{-١}{س^{٢}}$ ج) س د) $س^{٢}$

(٣) فى تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليين فإن احتمال الحصول على عددين متساويين فى الرميتين هو:

أ) $\frac{١}{٥}$ ب) $\frac{١}{٣٦}$ ج) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{١}{١٨}$

(٤) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $س^{٢}$ - ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ ج) $\frac{\pi}{٦}$ د) π

السؤال الثانى:

(١) أوجد معدل تغير الدالة د حيث د(س) = ٢س - $س^{٢}$ عندما س = ٢

(٢) صندوق به ٦ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٦ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا، ولوحظ العدد المكتوب على البطاقة. أوجد احتمال الأحداث الآتية:

➢ أ حدث الحصول على عدد أولى. ➢ ب حدث ظهور عدد زوجى يقبل القسمة على ٣.

السؤال الثالث

(١) أوجد المشتقة الأولى للدالة ص = (س - ١)(س + ١)

(٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف وكان:

ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ فأوجد

أ) ل(أ′) ب) (أ ∪ ب)′

السؤال الرابع

(١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^{٢}$ + ٢ والتى يكون عندها ميل المنحنى يساوى ٢

(٢) أوجد كلًّا من:

أ) $\int$ -٢ع ء ع ب) $\int$ ((س - ١)^{٥} + ٣) ء س

الاختبار الثامن — التفاضل والتكامل والاحتمال

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) معدل تغير الدالة د حيث: د(س) = س^{٢} - ١ عند س = -٢ يساوى

أ) ٤ ب) -٤ ج) -١ د) ١

(٢) $\int$ س$^{-٢}$ ء س = ...

أ) -س$^{-١}$ + ن ب) $-\frac{١}{س}$ ج) ١ + $\frac{١}{س^{٢}}$ د) س$^{-٣}$ + ث

(٣) يقال للحدثين أ، ب انهما متنافيان إذا كان ل(أ ∩ ب) = ...

أ) صفر ب) ١ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ل(أ)

(٤) ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ عندما س= ١ تساوى

أ) ١ ب) -١ ج) صفر د) غير معرف

السؤال الثانى:

(١) إذا كان د(س) = ٢س - س^{٢} فأوجد :

أ) دالة التغير ت(هـ) عند س = ١ ب) متوسط التغير فى الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ١,١

(٢) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل دالة احتمال معرفة على ف حيث:

ل(ب) = ٣ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٢ أوجد ل(أ)، ل(ب) إذا كان:

أ) أ ، ب حدثان متنافيان ب) أ ⊃ ب

السؤال الثالث:

(١) أوجد إذا كان ص = ٤س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س + ٩ فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(٢) كيس يحتوى ٤ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات سوداء سحبت كرة واحدة عشوائيًا، أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ) حمراء ب) ليست بيضاء ج) بيضاء أو سوداء

السؤال الرابع:

(١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} + ٣س^{٢} - ١ والتى عندها المماس يوازى المحور السينى.

(٢) أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ (س - ٥)(س - ١) ء س ب) $\int$ ٦(س - ٢)^{٥} ء س

الاختبار التاسع — التفاضل والتكامل والاحتمال

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) معدل تغير الدالة د(س) = س^{٢} عند س = ١ يساوى:

أ) ٢ ب) ١ ج) -١ د) -٢

(٢) احتمال وقوع الحدث المؤكد يساوى :

أ) صفر ب) ١ ج) $\frac{١}{٢}$ د) -١

(٣) ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ عندما س = ١

أ) صفر ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) ١

(٤) $\int$ (س^{٢} - ١) ﻫ س

أ) س^{٣} - س ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س + ث ج) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ث د) - س + ث

السؤال الثانى:

(١) أوجد معدل تغير الدالة د حيث: د(س) = س + $\frac{١}{س}$ عند س = ٢

(٢) إذا كان ف = {أ، ب، جـ} فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ل دالة احتمال لهذه التجربة أوجد

ل(أ) إذا كان ل(ب) = ٢ل(أ) ، ل(جـ) = $\frac{١}{٤}$ ثم أوجد ل(أ ∪ جـ)

السؤال الثالث:

(١) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ) ص = $\frac{س}{س + ١}$ ب) ص = س^{٣} + س^{٢} - ١

(٢) ليكن أ حدث نجاح الطالب فى امتحان الفيزياء، ب حدث نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات وكان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$

أ) احسب احتمال نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل.

ب) احسب احتمال نجاح الطالب فى الفيزياء فقط.

السؤال الرابع:

(١) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (س - ١)(س + ١) عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

(٢) أوجد:

أ) $\int$ (٢س - ٣)^{٥} ﻫ س ب) $\int$ ٢س(س^{٢} + ٣) ﻫ س

الاختبار العاشر — التفاضل والتكامل والاحتمال

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\frac{د}{د س}(\frac{١}{س^{٢}}) =$

أ $س^{-٢}$ ب $\frac{-٢}{س^{٣}}$ ج $-٢س^{-٣}$ د $س^{-٣}$

(٢) متوسط تغير الدالة د حيث: د(س) = $\sqrt{٨س}$ عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٤١

أ ٤٠ ب ٠,٤١ ج $\frac{٤١}{١٠}$ د $\frac{١٠}{٤١}$

(٣) $\int ٥ د س =$

أ ٥ ب ٥س + ث ج ٥س د ٥ + س

(٤) ميل المماس لمنحنى ص = ٢$س^{٢}$ عند النقطة (١، ٢) يساوى

أ ٢ ب ١ ج ٤ د صفر

السؤال الثانى:

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (٣س - ١)^{٥}

(٢) ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات، احسب احتمال كل من الأحداث الآتية:

أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط. ثانيًا: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

السؤال الثالث:

(١) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:-

أ د(س) = $\frac{١}{س}$ ب د(س) = $س^{٢} + س$

(٢) مدرسة ثانوية فيها ٢٠معلمًا، ٤ إداريين،يراد اختيار اثنين منهم عشوائيًّا؛ لمرافقة الطلاب فى بعثة من البعثات، فما احتمال أن يكون المرافقان: أ معلمين ب إداريًّا ومعلمًا ج إداريين.

السؤال الرابع:

(١) أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$ عند النقطة (١، ٢)

(٢) أوجد :

أ $\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢} د س$ ب $\int ٤ (س - ٢)^{٣} د س$

إجابات بعض التمارين والاختبارات

الوحدة الأولى: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

إجابة بعض التمارين (١ - ١)

١) ٩ ٢) ١٩ ٣) ١ ٤) ١٩ ٥) أ ٦) ء

٧) أ غير منتهية ب) منتهية ج) غير منتهية د) منتهية

٨) أ) (٢، ٦، ١٢، ٢٠، ٣٠)

ب) $(-\frac{١}{٣}، -١، ١، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٥})$

ج) $(\frac{١}{٣}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٢٧}، \frac{١}{٨١}، \frac{١}{٢٤٣})$

د) (-١، ٠، -١، ٤، -٩)

٩) أ النمط $(ع_ن) = ٤ن + ٦١$

ب) $(ع_ن) = ٣(-٢)^{ن-١}$

ج) $(ع_ن) = (\frac{١}{٢})^{ن}$

١٠) أ) (٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦)

ب) $ع_ن = ٢ن + ٦$ ج) ٢٠

د) اليوم الثانى عشر

١١) أ) (١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣)

ب) (٣ + ٩ + ١١ + ١٧ + ... إلى ٨ حدود)

ج) $(١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + ... + ∞)$

د) $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} + ... + ∞)$

١٢) أ ٦٥ ب) (٢ + ٧ + ١٤ + ٢٣ + ٣٤)، ٨٠

١٤) أ) $(٣ \times ٣٢ + ٣ \times ١٦ + ٣ \times ٨ + ٣ \times ٤)$

ب) محيط المثلث الرابع = ١٢سم

ج) ١٨٠ سم

١٥) أ) $\sum_{ر=١}^{ن} ٣ر = (٣^{١} + ٣^{٢} + ٣^{٣} + ٣^{٤} + ٣^{٥} + ...)$

ب) ٢٤٣ ج) ٣٦٣

إجابات بعض التمارين (١ - ٢)

١) متتابعة حسابية ء = ٣ ٢) ليست متتابعة

٣) متتابعة حسابية ء = ٦

٤) متتابعة حسابية ثابتة ء = ٠

٥) م. حسابية ء = ٢س + ص

٦) (٢، ٧، ١٢، ...) ٧) (٧، ٤، ١،)

٨) $(-٤، -\frac{١٥}{٤}، -\frac{٧}{٢}،)$

٩) ٢٠ ١٠) ٢٨

١١) $ع_ن = ٨٥ - ٨٤$ ١٢) $ع_ن = -\frac{٣}{٤} ن - \frac{١}{٤}$

١٣) ١٠ ١٤) ١٥

١٥) جـ ١٦) ء

١٧) ء ١٨) ٣

إجابات تمارين (١ - ٣)

١) ٢١٠ ٢) ١١٠ ٣) ٢٠٠

٤) ٢٤٣ ٥) ٩٠ ٦) ٣٥

٧) ٢٤ ٨) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر - ١)$ ٩) $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ر + ٢)$

١٠) خطأ والصواب أن المجموع صفر

١١) خطأ والصواب أن مجموع التسعة حدود الأولى = صفر أو مجموع الستة حدود الأولى = ٢٠٤

١٢) أ = ١٤، ء = ٤ ، جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ١٤ + ٩ × ٤] = ٣٢٠

١٣) جـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$(أ + ل) = $\frac{١٥}{٢}$ (٤ + ٢٦) = ٢٢٥

١٤) (٤٢٠)

١٥) - ٢٦٠ ١٦) ١٠٢٠ ١٧) ١١٠٧

إجابات تمارين (١ - ٤):

١) ليست متتابعة هندسية ٢) متتابعة هندسية ر = $\frac{١}{٣}$

٣) متتابعة هندسية ر = ٢ ٤) متتابعة هندسية ر = $\frac{١}{٢}$

٥) متتابعة هندسية ر = -٣

٦) ليست متتابعة هندسية

أسئلة الإكمال:

١١) واحد ١٢) واحد ١٣) ١٦٢

١٤) $ع_ن = ٣(-٢)^{ن-١}$ ١٥) ±٨ ١٦) ٢٥

اسئلة الاختيار

(١٨) ء (١٩) ب (٢٠) ب (٢١)

إجابات تمارين (١ - ٥):

(١) ب (٢) أ (٣) جـ (٤) جـ (٥) أ

إجابة بعض تمارين عامه

(١) ١ (٢) $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٥ر (٣) حن = ٤ن - ١

(٤) ± ١٢ (٥) أ = ٧ (٦) ١٩

(٧) ٨٠ (٨) ٣١

إجابات اختبار تراكمي

(١) المتتابعة هي ترتيب مجموعة من الأعداد الحقيقية المتسلسلة هي مجموع حدود المتتابعة.

(٢) الحد النوني للمتتابعة الحسابية على الصورة عن = أ + (ن - ١) ء حيث أ الحد الأول ، ء الأساس.
الحد النوني للمتتابعة الهندسية على الصورة حن = أ ر^(ن-١) حيث أ الحد الأول ، ر الأساس.

أسئلة ذات إجابات قصيرة

(٤) أ ١٤ ب $\frac{١}{٢}$
جـ -١٥ د ١

الوحدة الثانية: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

إجابات تمارين (٢ - ١):

(١) د (٢) جـ (٣) د
(٤) ٣^٣ = ٢٧ (٥) ٦
(٨) عدد الأرقام = (١٠)^٨ = ١٠٠٠٠٠٠٠٠

إجابات تمارين (٢ - ٢):

(١) د (٢) ب (٣) أ
(٤) د (٥) جـ (٦) جـ
(٧) ب (٨) ٦ (٩) ١٦
(١٠) ل٤ر = ١٢
(١٢) عدد الطرق = ٣ × ٤ = ١٢
(١٣) عدد طرق الاختيار = ١٥

(١٤) أ ل١^٦ = ٦ ب ل٢^٦ = ٣٠
(١٥) أ ٤٢ ب صفر
جـ ١٢٠ د ١٢
هـ ٦٤ و ٥٠٤١
(١٦) أ ٤ ب ٦
جـ ن = ٣ د ٧
(١٧) أ ل ن^٧ = ل٣^٧ ، ن = ٣
ب ⌊٢ن = ٢٤ ، ن = ٢
(١٨) ن = ٧ أو ن = ٨
(١٩) ل٣^١٠ = ٧٢٠
(٢٠) ل٣^٨ = ٣٣٦
(٢١) الأيمن = (ن + ٢) (ن + ١) = ل٣^(ن+٢)

إجابة تمارين (٢ - ٣):

(١) ب (٢) ب (٣) أ
(٤) ٢٠ ، ٩ ، ١٢ ، ١
(٥) ١٠ (٦) ٩ (٧) ١٥
(٨) ق٥^٥ + ق٤^٥ + ق٣^٥ = ١٦
(٩) ق٣^١٠ × ق٢^٨ = ٣٣٦٠
(١٠) أ $\frac{ل٣^{٨}}{⌊٣}$ ب $\frac{ل٢^{١٩}}{⌊٢}$
جـ $\frac{ل١^{ن}}{⌊٠}$ د $\frac{ل ص^{س}}{⌊ص}$
(١١) أ ٢٨ ب ٨٤
جـ ٢١٠ د ١

إجابات تمارين عامة

(١) ل٢^٤ = ٤ × ٣ = ١٢

(٢) ٣^٩ = ٧٢٩

(٣) ق٤^٠ + ق٤^١ + ق٤^٢ + ق٤^٣ + ق٤^٤ = ٢^ن
٢^٤ = ٢^ن ∴ ن = ٤

(٤) ∵ ⌊ن = ⌊١ ، ∴ ن = ٠ أو ن = ١

(٥) ب (٦) ج (٧) ج (٨) أ

(٩) ب (١٠) ب

(١١) أ ١ ب ٧٢٠ ج ٢٣
د ٥٠ هـ $\frac{١}{١٤}$ و ٢٤

(١٢) ن = ٥ ، $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٥)!}$ = ١ (١٣) ر = ٢ ، $\text{ق}_{٤}^{٢}$ = ١
(١٤) م = ٣ ، ن = ١٠ (١٥) $\text{ق}_{٧}^{١٠}$ = ١٢٠
(١٦) ن = ٥ (١٧) $\text{ق}_{١}^{٧} \times \text{ق}_{٢}^{٥}$ = ٧ × ١٠ = ٧٠

(١٨) ١٢ (١٩) $\text{ل}_{٢}^{١٢}$ = ١٣٢
(٢٠) أ ن = ٤ ب ن = ٢ ج ن = ٩
د ن = ٥ أو ن = ٦ هـ ن = ٩ و ر = ٣

حلول الاختبار التراكمى

(١) د (٢) ج (٣) ج (٤) ب
(٥) ب
(٦) أ ٣٢ ب ٠
(٧) ٤٠٠ (٨) ١٠
(٩) ١٢٠
(١٠) أ $\frac{١}{١٠٠}$ ب ١٠ ج $\frac{١}{٢٠}$
د ٩٦ هـ ٢٤
(١١) $\text{ق}_{٢}^{٦}$ = ١٥
(١٢) أ ن = ٦ ب ن = $\frac{٥}{٢}$
ج ن = ٨ د ن = ٦
هـ ن = ١ و ن = ٤

الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

إجابات بعض تمارين (٣ - ١):

(١) ب (٢) د (٣) د (٤) جـ

(٥) د(س) = $\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١$
∵ عندما تتغير س من $\text{س}_{١}$ إلى $\text{س}_{١} + \text{هـ}$
∴ ت(هـ) = د($\text{س}_{١} + \text{هـ}$) - د($\text{س}_{١}$)
= $(\text{س}_{١} + \text{هـ})^{٢} + ٢(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - ١ - \text{س}_{١}^{٢} - ٢\text{س}_{١} + ١$
= $٢\text{س}_{١}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ٢\text{هـ}$

أ ٠,٦١
ب ١

إجابة بعض تمارين (٣ - ٢)

(١) باستخدام تعريف الدالة المشتقة نجد:
أ د(س) = ٥ ب د(س) = ٦س
ج د(س) = $٣\text{س}^{٢}$ د د(س) = ٢ س + ٢

(٢) أ د(س) = $\frac{-١}{\text{س}^{٣}}$
الدالة د غير قابلة للاشتقاق عندما س = ٠

ب د(س) = $\frac{-١}{(\text{س} + ٣)^{٢}}$
د غير قابلة للاشتقاق عندما س = -٣

ج د(س) = $\frac{-٦}{(٢\text{س} - ٥)^{٣}}$
د غير قابلة للاشتقاق عندما س = $\frac{٥}{٢}$

د د(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{-٤\text{س}}}$
د غير قابلة للاشتقاق عندما س ≥ ٤

إجابات بعض تمارين (٣ - ٣):

(١) د (٢) أ (٣) جـ (٤) د
(٥) ٢ (٦) ٦س (٧) $٤\text{س}^{٣} - ٤\text{س}$
(٨) $١ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ (٩) $\frac{-٣}{\text{س}^{٤}}$ (١٠) صفر
(١١) $\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$ (١٢) $\frac{-١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}}$ (١٣) ١٠ س + ٣
(١٤) $٧\sqrt[٢]{\text{س}^{٦}} - \text{س}^{٤}$
(١٥) أ $١٥\text{س}^{٤}$ ب $-٦\text{س}^{-٩}$ ج $\frac{-٣}{\text{س}^{٣}}$
د $\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$ هـ $\frac{٥}{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$
و $\frac{-١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$
ز $\frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}$ ح $\frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}$
(١٦) $٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س}$ (١٧) $٢\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٧$

(١٨) $١٢س^{٥} + \frac{٣}{\sqrt[٢]{س}}$ (١٩) $٤ - \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$

(٢٠) $٩س^{٢} - \frac{٣}{٢}\sqrt{س}$

(٢١) $٦\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt[٢]{س}} - \frac{٣}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

(٢٢) $٦س^{٢} + ١٠س + ٢$ (٢٣) $٦س^{٢} + ٦س - ١٤$

(٢٤) $٥س^{٤} + ٢س - ٩$ (٢٥) $٤س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢$

(٢٦) $\frac{١٥}{(٥س+١)^{٢}}$ حيث $س \neq -\frac{١}{٥}$

(٣٣) $ص - ٥س + ١٠ = ٠ ، ٥ص + س - ٢ = ٠$

(٣٥) $أ = ٣ ، ب = -٤$

إجابة بعض تمارين (٣ - ٤)

(١) $\frac{١}{٣}س^{٣} + ث$ (٢) $\frac{١}{٨}س^{٨} + ث$

(٣) $٤س^{٢} + ث$ (٤) $-س^{٤} + ث$

(٥) $س^{٩} + ث$ (٦) $-\frac{٤}{س^{٣}} + ث$

(٧) $٥س + ث$ (٩) $-\frac{٣}{٨}س^{٨} + ث$

(١٠) $\frac{٤}{٥}س^{-٢} + ث$ (١١) $\frac{١}{٣}ن^{٧} + ث$

(١٢) $\frac{٢}{٥}ف^{٦} + ث$ (١٣) $\frac{١}{٢}س^{٢} + س + ث$

(١٤) $٥ن - ن^{٢} + ث$ (١٥) $\frac{١}{٤}ن^{٤} - \frac{٦}{٥}ن^{٥} + ث$

(٢٠) $س^{٧} - \frac{٧}{٣}س^{٣} + ث$ (٢١) $\frac{١}{٣}س^{٣} - س + ث$

(٢٧) $\frac{١}{٢}س^{٢} + س + ث$ (٢٨) $\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + ٩س + ث$

(٢٩) $\frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س + ث$ (٣٠) $\frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س + ث$

(٣١) $\frac{١}{٤}(س+٤)^{٤} + ث$ (٣٢) $\frac{١}{٢}(٢س-٧)^{٧} + ث$

(٣٣) $\frac{-١}{١٥}(٨ - ٣ن)^{٥} + ث$ (٣٤) $-٢(س-٣)^{-٣} + ث$

إجابات بعض التمارين العامة :

(١٠) أ $\frac{ص}{س} = ٢س - ٣$

ب $\frac{ص}{س} = ١٥س^{٢} + ٦س - ٤$

ج $\frac{ص}{س} = ٨س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧$

د $\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} + \frac{٣}{س^{٣}} + \frac{٢}{س^{٣}}$

(١١) أ صفر ب ١ ج ٤ د ٢

(١٢) أ $٤٥°$ ب $٤٥°$ ج $١٣٥°$ د $٢٠/٩٦°$

(١٤) ٢ (١٥) صفر

(١٦) أ $\frac{ص}{س} = ٦(٢س+١)^{٢}$

ب $\frac{ص}{س} = ١٥س^{٢}(س^{٣}+١)^{٤}$

ج $\frac{ص}{س} = ٤(٦س-١)(٣س^{٢} - س + ٢)^{٣}$

د $\frac{ص}{س} = ٢٤س^{٢}(٢س^{٣}+٥)^{٣}$

(١٧) $\frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} - س + ث$

(١٨) $\frac{١}{٣}\sqrt[٣]{س^{٣}} + ٤\sqrt{س} + ث$

(١٩) $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٤س + ث$

(٢٠) $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ث$

(٢١) $\frac{١}{٢}س^{٢} + س + ث$

(٢٢) $\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٩س + ث$

(٢٣) $(س-٢)^{٦} + ث$ (٢٤) $-(س+٣)^{-٣} + ث$

إجابات بعض تمارين اختبار تراكمى

(١) ب (٢) جـ (٣) د (٤) جـ

(٥) أ $٦س - ٥$ ب $٣س^{٢} - ٦س + ٥$

جـ $٢س$ د $\frac{٢}{(س+١)^{٢}}$

الوحدة الرابعة: الاحتمال

إجابة بعض تمارين (٤ - ١)

(٥) أ $= \{١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠\}$ ، ب $= \{١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢\}$

ج $= \{٣، ٩، ١٥\}$ ، د $= \{١٠، ٢٠\}$ ، و $= \{١، ٢، ٣، ٤\}$

(٩) جـ (١٠) د (١١) ب (١٢) د (١٣) د

(١٥) ل(أ) $= \frac{١}{٦}$ ، ل (ب) $= \frac{١}{١٨}$

(١٨) أ ٠,٢ ب ٠,٤٥ ج ٠,٥٥

(٢٢) $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٣٦}$ ، $\frac{٥}{١٨}$ (٢٣) $\frac{١٣}{١٥}$ ، $\frac{٤}{١٥}$ ، ٠,٤ ، ٠,٦

إجابة بعض التمارين العامة

(١) جـ (٢) د (٣) جـ (٤) أ (٥) أ

(٦) د (٧) جـ (١١) ل (ب) $= ٠,٣$

(١٤) ل (أ) $= \frac{٣}{٨}$ ل (ب) $= \frac{٧}{٨}$ ل(ج) $= \frac{١}{٢}$ ل (د) $= \frac{١}{٤}$

(١٧) أ ٠,٣٦ ب ٠,٨٤

(١٨) أ ٠,٢٣٥ ب ٠,١ جـ ٠,٥٣ د ٠,٨٢٥

الاختبار التراكمى

(١) ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

(٢) {(ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

(٣) {(٢، ص)، (٢، ك)، (٣، ص)، (٣، ك)، (٥، ص)، (ق، ك)}

(٤) {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤،١)}

(٥) {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨}

(٦) {(ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)}

(٨) أ ٠,١٥ ب ٠,٢ جـ ٠,٣

(٩) أ ٠,٣ ب ٠,٤٥ جـ ٠,٧

(١٠) أ ٠,٢٥ ب ٠,٣٥ جـ ٩١

إجابة بعض تمارين الاختبار الأول :

السؤال الأول:

(١) ب (٢) جـ (٣) د (٤) جـ

السؤال الثانى:

(١) ن = ٧ (٢) ٢

السؤال الثالث:

(١) أ (١٦، ٣٢، ٦٤،) ب ١٦٣٦٨

(٢) أ (-٣) + (-٥) + (-٧) + (-٩) +(-١١) +(-١٣) = -٤٨

السؤال الرابع:

(١) أ ١١٤ ب ٢٤٠

(٢) أ ر = ٣ ب ٨ أو ٩

إجابة بعض تمارين الاختبار الثاني :

السؤال الأول :

(١) جـ (٢) جـ (٣) أ (٤) ب

السؤال الثانى:

(١) (٥، ٨، ١١، ١٤، ١٧، ٢٠، ٢٣، ٢٦) ، المجموع = ١٢٤

(٢) ٤٨

السؤال الثالث:

(١) ٧٦٢ (٢) أ ١,٤٩٩٩ ب ١٣٣

السؤال الرابع:

(١) أ ١١٨ ب ١٤

(٢) ٥ ! = ١٢٠

إجابة بعض تمارين الاختبار الثالث:

السؤال الأول:

(١) أ (٢) جـ (٣) د (٤) ب

السؤال الثانى :

(١) ٨ (٢) (١، ٣، ٩، ...) ، ٣٢٨٠

السؤال الثالث :

(١) (٦، ٨، ١٠، ...) ، ١٥٠

السؤال الرابع :

(١) $ق_{٣}^{٤} \times ق_{٢}^{٣} = ١٢$ (٢) أ ٣٣٦ ب ٤٠

إجابة بعض تمارين الاختبار الرابع:

السؤال الأول:

(١) أ (٢) أ (٣) ب (٤) أ

السؤال الثانى:

(١) ١٠ (٢) أ ٣٦٠ ب ٣٣٠

السؤال الثالث:

(١) أ = ٦٤٠ ب = ١٦٠

جـ = ٨٠ المجموع إلى ما لانهاية = ١٢٨٠

(٢) (٣، ٥، ٧، ...) ، $(٣، \frac{٣}{٢}، \frac{٣}{٤}، ...)$ ، (٣، ٣، ٣، ...)

حـ$_{\infty}$ = ٦

السؤال الرابع:

(١) $ق_{٢}^{°} = ١٠$ (٢) أ ن = ١٠ ، ب ر = ٥

إجابة بعض تمارين الاختبار الخامس:

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) ب (٣) ب (٤) جـ

السؤال الثانى:

(١) أ ٣٢ ب ٩ (٢) $(\frac{٢٧}{٨}، \frac{٣}{٤}، ...، \frac{٨}{٢٧})$

السؤال الثالث:

(١) ن = ١٥ ، $ح_{١٠}$ من النهاية = ٢٣ (٢) ن = ١٩

السؤال الرابع:

(١) أ ١٢٦ ب ٦٢ث (٢) ١٢ طريقة

إجابة بعض تمارين الاختبار السادس

السؤال الأول :

(١) د (٢) أ (٣) جـ (٤) أ

السؤال الثانى :

(١) ٢ (٢) ٠,٧

السؤال الثالث :

(١) $٤س^{٣} + ٨س$

السؤال الرابع :

(١) صفر (٢) أ $س^{٢} + ٣س + ث$

ب $\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + س + ث$

إجابة بعض تمارين الاختبار السابع:

السؤال الأول :

(١) ب (٢) ب (٣) جـ (٤) أ

السؤال الثانى:

(١) -٢ (٢) ل (أ) = $\frac{١}{٢}$، ل (ب) = $\frac{١}{٦}$،

السؤال الثالث :

(١) $\frac{ص}{س}$ = ٢ س (٢) أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{١١}{٢٤}$

السؤال الرابع:

(١) (١، ٣) (٢) أ $- ع^{٢} + ث$

ب $\frac{١}{٦} (س - ١)^{٦} + ٣ س + ث$

إجابة بعض تمارين الاختبار الثامن :

السؤال الأول:

(١) ب (٢) أ (٣) أ (٤) ب

السؤال الثانى:

(١) أ $- هـ^{٢}$ ب -١, ٠

السؤال الثالث:

(١) صـ = $١٢س^{٢} - ١٠س + ٤$ (٢) $\frac{٥}{١٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٧}{١٢}$

السؤال الرابع :

(١) (٠، -١) ، (-٢، ٣)

(٢) أ $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ث$ ب $(س - ٢)^{٦} + ث$

إجابة بعض تمارين الاختبار التاسع:

السؤال الأول:

(١) أ (٢) ب (٣) ب (٤) ب

السوال الثانى:

(١) $\frac{٣}{٤}$ (٢) $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$

السؤال الثالث:

(١) أ $\frac{-١}{(س+١)^{٢}}$ ب $٣س^{٢} + ٢س$

(٢) أ $\frac{٥}{٦}$ ب $\frac{١}{٦}$

السؤال الرابع:

(١) صـ = ٢ س - ٢ ، صـ = -٢ س -٢

(٢) أ $\frac{١}{١٢} (٢س - ٣)^{٦} + ث$ ب $\frac{١}{٢} س^{٤} + ٣س^{٢} + ث$

إجابة بعض تمارين الاختبار العاشر:

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) د (٣) ب (٤) جـ

السؤال الثانى:

(١) ١٥ $(٣س - ١)^{٤}$ (٢) ل(أ) = $\frac{٣}{٨}$ ل(ب)= $\frac{١}{٢}$

السؤال الثالث:

(١) أ $\frac{-١}{س^{٢}}$ ب $٢س + ١$

(٢) أ $\frac{٩٥}{١٣٨}$ ب $\frac{٢٠}{٦٩}$ جـ $\frac{١}{٤٦}$

السؤال الرابع:

(١) صفر (٢) أ $\frac{١}{٢} س^{٢} - ٣س + ث$ ب $(س - ٢)^{٤} + ث$